

UNIVERSIDADE DO ESTADO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Alexandre Nascimento de Andrade

Grupos de Simetria dos Polígonos Regulares: Da teoria à ampla
possibilidade de aplicações

Manaus-AM
Fevereiro/2024

Alexandre Nascimento de Andrade

Grupos de Simetria dos Polígonos Regulares: Da teoria à ampla
possibilidade de aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof^o. Dr Almir Cunha da Graça Neto

Manaus-AM
Fevereiro/2024

**TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO
ESTADO DO AMAZONAS**

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de ALEXANDRE NASCIMENTO DE ANDRADE.

Em 06 de fevereiro de 2024, às 17h40, na Sala Profª Maria Clara Dantas da Escola Normal Superior da UEA na presença da Banca Avaliadora composta pelos professores: Dr. Almir Cunha da Graça Neto, Dr. Edson Lopes de Souza e Dra. Nadime Mustafa Moraes o aluno ALEXANDRE NASCIMENTO DE ANDRADE apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "GRUPOS DE SIMETRIA DOS POLÍGONOS REGULARES: DA TEORIA À AMPLA POSSIBILIDADE DE APLICAÇÕES.". A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,85 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Manaus, 06 de fevereiro de 2024.

Jorge M. R.

Presidente da Banca Avaliadora

Almir Cunha da Graça Neto

Orientador

Nadime Mustafa Moraes

Avaliador 1

Edson Lopes de Souza

Avaliador 2

Alexandre Nascimento de Andrade

Aluno



UEA
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DO
AMAZONAS

Escola Normal Superior
Av. Djalma Batista, 2470 - Chapada
CEP: 69.050-010 / Manaus - AM



AMAZONAS
GOVERNO DO ESTADO

"Não temas, porque eu sou contigo; não te assombres, porque eu sou teu Deus; eu te fortaleço, e te ajudo, e te sustento com a destra da minha justiça".

Isaías 41:10

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado forças quando fraquejei e por ter me mostrado a luz quando eu só via escuridão.

Agradeço ao meu pai, Lázaro Santos de Andrade, por despertar em mim o gosto pela matemática, e à minha mãe, meu maior exemplo de força, dedicação e comprometimento, a pessoa mais importante na minha vida, a quem dedico este trabalho.

Agradeço pelo apoio e paciência aos meus irmãos, Lázaro Santos de Andrade Filho, Lusandra Nascimento de Andrade, e, especialmente, à minha irmã, Alexandra Nascimento de Andrade, minha primeira mestra, professora e grande inspiração.

Agradeço ao meu professor orientador, Prof^o Dr. Almir Cunha da Graça Neto, expresse minha gratidão por todos os ensinamentos e dedicação na construção deste trabalho. Ao Prof^o Dr. Jorge Menezes Rodrigues, como professor da disciplina, e pela sua contribuição na minha formação como educador.

Agradeço a Prof^a Dra. Kelly Alves Marães de Almeida que foi minha primeira guia na descoberta dos números e de sua verdadeira natureza. A Prof^a Msc. Andrea Fragata, como minha primeira orientadora de projeto, dando o primeiro voto de confiança. A Prof^a Dra. Nadime Mustafa Moraes agradeço por todas as oportunidades e todo o conhecimento oferecido.

Agradeço aos meus professores de Física, Prof^o Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles e Prof^o Msc. Raffaele Amazonas Novellino, agradeço por despertarem em mim o interesse pela Física, superando uma das minhas maiores dificuldades.

Agradeço ao meu amor, Edilane Araújo de Lima, por sempre estar ao meu lado nos momentos bons e ruins, nunca me deixando desistir. Aos meus amigos, companheiros nessa jornada, em especial Paulo David, Emanuel Marques e Enan Jordan.

Agradeço, finalmente, também aos meus familiares e amigos, aos distantes e aos próximos, pelo companheirismo e por todas as vezes que comemoramos juntos, mesmo sem motivos.

Resumo

O trabalho de pesquisa propõe explorar o estudo do grupo de simetria dos polígonos regulares. Essa investigação se baseia na compreensão e classificação de estruturas algébricas, resultando em definições e propriedades aplicáveis em diversas áreas. A partir disso, pode-se desenvolver o grupo de simetria dos polígonos regulares e suas propriedades. Traçamos como objetivos a generalização das principais relações deste grupo e sua aplicabilidade. Desta forma, a pesquisa foi dividida em etapas que exploravam aspectos como contexto histórico, fundamentos teóricos, demonstrações, exemplos e aplicações. A escolha visa enriquecer a literatura existente, especialmente por meio de uma aplicação prática na teoria da conservação, destacando a relevância dessa investigação. Autores como Évariste Galois e Felix Klein, defensores da teoria dos Grupos, influenciaram a escolha do tema. O trabalho aborda a aplicação prática da simetria na teoria da conservação, exemplificando como a simetria é essencial para o voo de um drone. A proposta é defender a teoria de Klein sobre a ampla aplicabilidade da simetria e a importância da conceituação algébrica nesta investigação. Contudo, foi possível utilizar aspectos algébricos e físicos, junto a autores de engenharia e explicar um modelo idealizado de voo de drone. Assim são feitas generalizações que contemplam os objetivos da investigação.

Palavras-chave: Grupo, simetria, polígonos.

Sumário

Introdução	5
1 Revisão de Literatura	7
1.1 Aspectos Históricos	7
1.2 Grupos	8
1.2.1 Propriedades básicas de um grupo	9
1.3 O Grupo das Permutações	10
1.4 Subgrupos	12
2 Metodologia da Pesquisa	14
2.1 A abordagem e as estratégias de investigação	14
2.2 Etapas da pesquisa e instrumentos de coleta de dados	15
3 Grupo de Simetria dos Polígonos Regulares	16
3.1 Exemplos clássicos	16
3.2 Generalização do Grupo Diedral	21
4 Aplicação	27
4.1 Introdução aos drones	30
4.2 O quadróptero	31
4.3 Movimentos do Quadróptero	32
4.3.1 Movimentos verticais	33
4.3.2 Movimentos pelas laterais	34
4.3.3 Movimentos diagonais	35
4.3.4 Algumas percepções	36
Considerações Finais	38
Referências	40

Introdução

A matemática, ao longo dos séculos, apresentou-se como uma linguagem da natureza. Ela consegue explicar diversos fenômenos naturais, e o seu desenvolvimento é paralelo à evolução humana. Uma das primeiras observações feitas pelo homem foram os padrões presentes no seu cotidiano. Dentro desses padrões, é possível destacar algo que mais tarde foi chamado de simetria.

A simetria ou a ausência dela está presente em quase tudo à nossa volta. Podemos observar em objetos e nas moléculas de átomos. Para entendê-la de forma mais aprofundada, precisamos de conhecimentos algébricos que estruturam tal conhecimento. O estudo de grupos algébricos se apresenta justamente com o papel de formalizar e transformar esse conhecimento empírico em conhecimento científico.

O estudo de grupos tem papel revolucionário na matemática. Ele permite a compreensão e classificação de diversas estruturas algébricas. Através disso, é possível encontrar definições, desenvolver propriedades e teoremas que mais tarde são aplicados em diversas áreas, os quais facilitam a nossa vida. Desta forma, quanto mais pesquisas tiverem nessa área, melhores serão os resultados em outros setores de investigação.

Nessa perspectiva, a presente investigação tem sua origem após uma série de experiências vivenciadas pelo autor. A primeira delas ocorreu na adolescência, quando, ao comprar um livro chamado "Amor e Matemática", despertou interesse pelo assunto de simetria. Durante o terceiro ano do Ensino Médio, surgiu a oportunidade de o autor participar de uma feira onde novamente se deparou com o mesmo objeto de estudo.

A experiência na graduação ressaltou a importância desse conteúdo, que logo foi aplicado à Geometria. Durante as aulas de Álgebra, nos deparamos com o estudo dos Grupos e, em particular, os Grupos de Simetria. A partir dessas aulas, foi pensado que quando chegasse o momento da disciplina de TCC, o tema poderia ser sobre os grupos de Simetria dos polígonos regulares.

Este é um tema que não é tão aprofundado na disciplina de Álgebra na graduação em Matemática. Normalmente, esse assunto é estudado em níveis mais avançados, como em cursos de Mestrado ou Doutorado. Portanto, escolhemos explorar esse conteúdo como uma oportunidade de aprofundar nossos conhecimentos nas noções e exemplos desse tipo de grupo, assim enriquecendo a literatura deste conteúdo que possui diversas aplicações em estudos contemporâneos.

Alguns autores já destacavam, há algum tempo, a importância e relevância desse tema. Évariste Galois foi um importante matemático e um dos que desenvolveu a teoria dos Grupos. Felix Klein foi um matemático que defendia a ideia da unificação matemática por meio dessa teoria. Assim, ele demonstrou as interligações entre os Grupos e a Geometria, especialmente a simetria dos polígonos.

Atualmente, reconhecemos o significativo potencial dos grupos de simetria na compreensão de padrões e propriedades dos polígonos regulares. Essa área da Matemática possui diversas aplicações científicas. Na Física, a teoria da conservação e a teoria da interação entre partículas são estudos atuais que requerem o conhecimento básico da simetria de seu respectivo grupo.

Durante o desenvolvimento do trabalho, além do desenvolvimento das definições e propriedades algébricas, surgiu a possibilidade de mostrar a potencialidade deste conteúdo na teoria da conservação. Com isso, o trabalho buscará explorar a teoria de Klein em relação à ampla aplicabilidade de tal investigação. Como exemplificação, será utilizada como a simetria é essencial para o voo de um drone.

Assim, este trabalho busca enriquecer a literatura científica existente, apresentando uma abordagem aprofundada sobre os grupos de simetria dos polígonos regulares e sua ampla possibilidade de aplicação. Pretende-se, assim, oferecer uma contribuição teórica e demonstrativa sobre o tema, favorecendo o avanço do conhecimento matemático e científico, despertando assim inquietação para novas investigações nesta área.

Capítulo 1

Revisão de Literatura

Este capítulo será uma introdução a teoria dos Grupos que servirá como base para o estudo dos Grupos de Simetria e suas aplicações. Nele será visto a história de como este estudo foi desenvolvido e quais os seus principais autores. Apresentaremos teoremas e definições fundamentais que são essenciais para o entendimento desse campo. Além disso, apresentaremos exemplos que serão utilizados posteriormente como exemplos no Grupo de Simetria dos Polígonos Regulares.

1.1 Aspectos Históricos

A teoria dos Grupos é um ramo fundamental da matemática que envolve o estudo de estruturas algébricas. Ao longo dos anos, esse campo recebeu contribuições significativas de matemáticos renomados, estabelecendo uma longa história de desenvolvimento.

Segundo Kleiner (1987) a história da teoria dos grupos tem início com Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) que propôs a resolução de equações em termos de permutações de suas raízes, estabelecendo assim as bases para o estudo dos grupos. Ele observou que as raízes de uma equação polinomial podem ser permutadas e que essas permutações podem ser analisadas e manipuladas matematicamente.

Niels Henrik Abel (1802-1829) foi um matemático notável. Aos 16 anos, recebeu a recomendação de leitura de alguns livros clássicos na matemática. Com esse incentivo, Abel começou a estudar um dos temas mais complexos de sua época: as equações de grau maior que cinco. Ele pensou ter demonstrado a solução para esse tipo de equação com a publicação de um artigo em 1824; no entanto, acabou provando a inexistência de uma fórmula genérica para esse tipo de equação. Essa descoberta posteriormente serviu de base para os primeiros estudos dos grupos de simetria.

Évariste Galois (1812-1832) emergiu como um dos matemáticos mais proeminentes a contribuir para o desenvolvimento da teoria dos grupos. Em seus artigos, Galois abordou a impossibilidade de resolver, de forma usual, equações de grau maior que quatro. Ele

fundamentou seu trabalho nas permutações das raízes de uma equação polinomial, que mais tarde foi reconhecida como satisfazendo a definição de grupo.

Boyer (2012) nos mostra que a vida de Galois, em resumo, foi marcada por tragédias. Ele enfrentou rejeições repetidas, começando pela sua não aceitação na *École Polytechnique*. Seus artigos e ideias também foram frequentemente rejeitados. Além disso, Galois enfrentou a tragédia pessoal do suicídio de seu pai.

Desiludido com sua vida, Galois ingressou na Guarda Nacional. Em um fatídico duelo, acabou perdendo sua vida, deixando como legado seu vasto conhecimento. Em 1846, Joseph Liouville revisou e publicou os artigos e escritos de Galois, tornando assim suas ideias conhecidas. Galois, impulsionado pela demonstração de Abel sobre a insolubilidade de equações quínticas, descobriu que equações algébricas podem ser resolvidas por radicais quando seu grupo simétrico é solúvel. Embora a definição de solubilidade seja complexa, envolvendo relações entre grupos e seus subgrupos, Galois contribuiu significativamente para essa compreensão.

Segundo Boyer (2012) Felix Klein (1849-1925) desempenhou um papel importante na evolução da teoria dos grupos de simetria. Inspirado pelos trabalhos de Lagrange e Galois, Klein percebeu o potencial unificador do conceito de grupo e demonstrou sua aplicação à geometria. Assim, nasceu o estudo algébrico das figuras que permanecem invariantes sob determinadas transformações, explorando diversas figuras nos diferentes tipos de geometria e as rotações ao redor de um eixo específico, preservando sua simetria.

Atualmente, os grupos de simetria são objetos de estudo na matemática aplicada, desempenhando um papel fundamental principalmente na química e na física. Através dos grupos de simetria, é possível compreender as propriedades dos modelos moleculares e identificar leis de conservação. É notável a importância prática da teoria dos grupos nessas áreas e suas aplicações concretas.

1.2 Grupos

Para darmos início ao estudo dos grupos de simetria dos polígonos regulares, antes devemos compreender de forma preliminar a teoria dos grupos para conseguirmos ter domínio total de sua definição e algumas propriedades.

Definição 1.2.1 \square *Um conjunto não vazio G munido com uma operação $*$ é dito um grupo sob essa operação se tem as seguintes propriedades, chamadas de axiomas de grupo:*

1. *Fechamento: Para quaisquer $a, b \in G$, temos $a * b \in G$.*
2. *Associatividade: Para quaisquer $a, b, c \in G$, temos $(a * b) * c = a * (b * c)$.*

¹As definições propriedades e demonstrações desta seção estão de acordo com (PAPANTONPOULOU, 2002)

3. *Elemento neutro: Existe um elemento $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ temos $a * e = e * a = a$. Esse elemento e é chamado de elemento neutro em G .*
4. *Inverso: Para cada $a \in G$, existe um elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Esse elemento a^{-1} é chamado de inverso de a em G .*

Definição 1.2.2 *Um grupo G com a operação $*$ é dito abeliano se a operação $*$ em G for comutativa, ou seja, para todo $a, b \in G$, temos $a * b = b * a$.*

Observação 1.2.1 *Para uma simplificação na notação, podemos indicar um grupo apenas por $(G, *)$, em que o símbolo $*$ indica a operação sobre G . Outra opção de notação seria utilizar a expressão "Seja G um grupo" ou "Consideremos um grupo G ", nesse tipo de notação a operação deve ser subentendida.*

Exemplo 1.2.1 $(\mathbb{Z}, +)$ *O conjunto de todos os inteiros \mathbb{Z} , juntamente com a adição usual, formam um grupo. Temos $0 \in \mathbb{Z}$ como elemento neutro, e para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe um $-a$ que é o inverso de a .*

Exemplo 1.2.2 $(\mathbb{N}, +)$ *O conjunto de todos os naturais \mathbb{N} , juntamente com a adição usual, não formam um grupo. Temos $0 \notin \mathbb{N}$ como elemento neutro, e para todo $a \in \mathbb{N}$, não existe um $-a$ que é o inverso de a .*

Exemplo 1.2.3 $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ *Os conjuntos dos números racionais, reais e complexos, juntamente com a adição usual, formam grupos aditivos.*

Exemplo 1.2.4 (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) *Percebemos que, devido ao zero presente no conjunto dos números racionais, ele não forma um grupo com a operação usual de multiplicação. Isso ocorre porque não existe um racional a' tal que $a' \cdot 0 = 1$ dentro dos números racionais. Algo semelhante ocorre com os conjuntos dos números reais e complexos. Se considerarmos $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, todo elemento dos números racionais terá um inverso multiplicativo. Portanto, (\mathbb{Q}^*, \cdot) é um grupo multiplicativo. De forma análoga, (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) também se tornam grupos multiplicativos.*

1.2.1 Propriedades básicas de um grupo

Para qualquer grupo G :

1. O elemento identidade e é único.
2. Para cada $a \in G$, o elemento inverso a^{-1} é único.
3. Para qualquer $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
4. Para qualquer $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

5. Para qualquer $a, b \in G$, as equações $ax = b$ e $ya = b$ possuem soluções únicas.

Demonstração:

1. Se tanto e quanto e' são elementos neutros em G . Então $ee' = e'$ porque e é uma identidade, mas também $e'e = e$ porque e' é uma identidade. Portanto, $e = \tilde{e}$.
2. Suponha que a' e a'' são inversos de $a \in G$, então $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$.
3. Temos que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, e como (2) implica que o inverso de um elemento é único, segue que a é o inverso de a^{-1} , ou seja, $(a^{-1})^{-1} = a$.
4. Temos que $(a^{-1}b^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = e$ e de forma similar $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$, e como, por (2), o inverso é único, segue que $b^{-1}a^{-1}$ é inverso de ab , ou seja $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
5. Para $a, b \in G$, a equação $ax = b$ implica $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$, e como $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = ex = x$, a equação implica $x = a^{-1}b$. Portanto, x é único já que a^{-1} é único. Analogamente, a equação $ya = b$ implica $y = ba^{-1}$, e y é único.

Para qualquer número inteiro positivo n , abreviamos $a \cdot \dots \cdot a$ (n vezes) como a^n e $a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}$ (n vezes) como a^{-n} . Nós também usaremos $a^0 = e$. Quando o grupo for aditivo, nós usaremos na em vez de a^n para $n \in \mathbb{Z}$

1.3 O Grupo das Permutações

Como mencionado anteriormente, uma das bases fundamentais deste trabalho é o estudo do grupo de permutações. Portanto, nesta seção, abordaremos esse grupo com maior detalhamento, conhecendo suas definições e alguns exemplos, a fim de aprofundar nosso entendimento sobre o assunto.

Definição 1.3.1 *Uma função $f : A \rightarrow A$ é uma permutação do conjunto A se for tanto injetora quanto sobrejetora, ou seja, uma bijeção.*

Exemplo 1.3.1 *A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + 1$ é uma permutação, porque se $f(n_1) = f(n_2)$, então $n_1 + 1 = n_2 + 1$ concluímos que f é injetora. Também porque para $m \in \mathbb{Z}$, $f(m - 1) = m$, ou seja, f é sobrejetora.*

Exemplo 1.3.2 *A função $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $g(n) = 2n$ não é uma permutação, pois não é sobrejetora, $g(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$*

Exemplo 1.3.3 Exemplo 2.3.4 *A função $h : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $h(1) = 3$, $h(2) = 4$, $h(3) = 1$, $h(4) = 2$ é uma permutação, pois é tanto injetora quanto sobrejetora.*

Exemplo 1.3.4 Exemplo 2.3.5 A função $j : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $j(1) = 2, j(2) = 2, j(3) = 4, j(4) = 3$ não é nem injetora nem sobrejetora.

Definição 1.3.2 Seja A um conjunto não vazio. Chama-se permutação de A toda função bijetora f de A em si próprio $f : A \rightarrow A$.

Observação 1.3.1 Seja $\phi \in S_n$. Então, ϕ pode ser representado pela notação usual de duas linhas:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) & \dots & \phi(n-1) & \phi(n) \end{pmatrix}$$

Nota-se que temos n colunas e 2 linhas, sendo assim um número finito de elementos.

Teorema 1.3.1 Seja $A = \{1, 2, \dots, n\}$ e seja S_n a coleção de todas as permutações de A . Então, S_n é um grupo sob a multiplicação de permutações.

Demonstração:

1. (*Fechamento*) Permutações são funções injetoras e sobrejetoras, e a permutação de funções resulta em uma função. Sabemos que se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ são duas funções bijetoras, então a função composta $g \circ f : A \rightarrow C$ também é uma função bijetora, ou seja, a composição de permutações ainda é uma permutação.
2. (*Associatividade*) Para $x \in A$ temos que $f \circ (g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g) \circ h(x)$. Desta forma a composição de funções é associativa.
3. (*Identidade*) A permutação definida por $\rho_0(i) = i$ para todo $i \in A$ é o elemento identidade para a multiplicação de permutações.
4. (*Inversa*) Para $\phi \in S_n$, seja ϕ injetora e sobrejetora, sabemos que a função dada por $\phi^{-1}(i) = j$, onde $\phi(j) = i$ é definida como a inversa de ϕ para a multiplicação de permutações. Isso porque a função é bijetora então ela admite inversa.

Definição 1.3.3 O grupo que consiste no conjunto S_n de todas as permutações em $A = \{1, 2, \dots, n\}$, sob a operação de multiplicação de permutações, é chamado de grupo simétrico de grau n .

Proposição 1.3.1 O grupo simétrico S_n tem ordem $|S_n| = n!$

Demonstração:

Seja $\phi \in S_n$:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) & \dots & \phi(n-1) & \phi(n) \end{pmatrix}$$

Existem n escolhas para $\phi(1)$. Uma vez que tenhamos escolhido um valor para $\phi(1)$, existem $n-1$ escolhas para $\phi(2)$. Uma vez que $\phi(1)$ e $\phi(2)$ tenham sido escolhidos, existem $n-2$ escolhas para $\phi(3)$ e assim por diante. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

1.4 Subgrupos

Para provar alguns resultados precisaremos dos conceitos de subgrupo. Desta forma nessa subseção veremos este conceito tão importante, assim como sua definição, alguns de seus teoremas e exemplos.

Definição 1.4.1 *Um subconjunto não vazio H de um grupo G é um subgrupo de G se H é um grupo sob a mesma operação de G . Usamos a notação $H \leq G$ para indicar que H é um subgrupo de G .*

Exemplo 1.4.1 $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$ sob a operação de adição.

Exemplo 1.4.2 $\mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$ sob a operação de multiplicação.

Teorema 1.4.1 (Teste de subgrupo)

Um subconjunto não vazio H de um grupo G é um subgrupo de G se e somente se a seguinte condição é satisfeita:

(*) Para todo $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que H seja um subgrupo de G e tome quaisquer $a, b \in H$. Como H é um subgrupo, ele contém o inverso de qualquer um de seus elementos, e assim $b^{-1} \in H$, já que $b \in H$. Novamente, como H é um subgrupo, ele contém a operação deste grupo, e portanto $ab^{-1} \in H$ já que $a, b^{-1} \in H$.

(\Leftarrow) Suponha que a condição (*) seja satisfeita. Vamos verificar os quatro axiomas de grupo:

1. (*Identidade*) Como H é não vazio, ele contém algum elemento a . Aplicando a condição (*) ao par a, a^{-1} , concluímos que $e = aa^{-1} \in H$.
2. (*Inverso*) Para qualquer $b \in H$, aplicando (*) ao par b, b^{-1} , concluímos que $b^{-1} = eb^{-1} \in H$.
3. (*Fechamento*) Para quaisquer $a, b \in H$, acabamos de mostrar que $b^{-1} \in H$. Aplicando (*) ao par a, b^{-1} , concluímos que $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$.
4. (*Associatividade*) A operação em H é associativa porque é a mesma operação em G , que é associativa, já que G é um grupo e H é um subconjunto de G .

Note que se a operação de grupo for de adição, então (*) é escrito da seguinte forma: (*). Para qualquer $a, b \in H$, $a - b \in H$

Se a operação de grupo for de multiplicação, então (*) é escrito da seguinte forma: (*). Para qualquer $a, b \in H$, $a.b^{-1} \in H$

Usando o teste de subgrupo, agora podemos determinar facilmente em muitos casos se um subconjunto de um grupo é um grupo.

Exemplo 1.4.3 Para qualquer número inteiro $n \geq 0$, $n\mathbb{Z}$ é um subgrupo de \mathbb{Z} sob adição. Pois, se $a, b \in n\mathbb{Z}$, então $a = nr$ para algum número inteiro r e $b = ns$ para algum número inteiro s . Mas então $a - b = nr - ns = n(r - s) \in n\mathbb{Z}$.

Exemplo 1.4.4 O conjunto H dos números inteiros ímpares não é um subgrupo de \mathbb{Z} sob adição, pois $1, 3 \in H$, mas $1 - 3 = -2 \notin H$.

Teorema 1.4.2 Um subconjunto não vazio H de um grupo G é um subgrupo de G se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

1. (Fechamento) Para quaisquer $a, b \in H$, tem-se $ab \in H$.
2. (Inverso) Para qualquer $b \in H$, tem-se $b^{-1} \in H$.

Demonstração (\Rightarrow): Se H é um subgrupo de G , então as condições de fechamento e inverso são satisfeitas, é claro, porque são axiomas de grupo.

Demonstração (\Leftarrow): Assumindo que as condições de fechamento e inverso são satisfeitas, consideramos quaisquer $a, b \in H$. Temos $b^{-1} \in H$ pela condição de inverso, e assim $ab^{-1} \in H$ pela condição de fechamento. Pelo Teorema do teste de subgrupo, isso é suficiente para mostrar que H é um subgrupo.

Capítulo 2

Metodologia da Pesquisa

2.1 A abordagem e as estratégias de investigação

Para a efetivação deste projeto, investigamos conhecimentos sobre o Grupo Diedral, de modo que desenvolvemos seus principais teoremas e axiomas do Grupos de Simetria dos Polígonos Regulares. Como hipóteses da pesquisa, destaca-se que se um polígono possui n lados, então ele possui $2n$ simetrias. Os ângulos de $\frac{2\pi}{n}$ determinam o ângulo de rotação que preserva a simetria de um polígono de n lados. A partir desses estudos algébricos será possível desenvolver a ampla aplicabilidade deste conteúdo.

Nesta perspectiva, a pesquisa possui uma abordagem qualitativa, na qual estaremos tipicamente envolvidos em uma experiência investigativa Creswell (2021) [5], a partir de um enfoque bibliográfico, baseado em inferências de literaturas que contemplem os estudos propostos para o projeto de matemática pura voltada para a álgebra. A pesquisa é exploratória, realizada a partir da coleta de informações científicas com o objetivo de compreender as definições e teoremas que envolvem o campo dos grupos de simetria dos polígonos regulares.

Nos primeiros meses, foi realizada uma revisão de literatura, tendo como principais referências PAPANTONOPOULOU (2002) [14] e DOMINGUES E IEZZI (2018) [6]. Em seguida, foram estudados elementos que antecedem e englobam o conhecimento de grupos. Desta foram foram construídos e exemplificados os grupos mais conhecidos.

A partir dessa revisão, construímos o grupo de simetria do triângulo equilátero e do quadrado, com suas devidas demonstrações e relações. A partir destes exemplos, definimos a generalização do Grupo de Simetria dos Polígonos Regulares. Dando sequência ao estudo foi possível mencionar a importância dele em diferentes tipos de aplicações, dando-se enfoque a uma específica.

Desta forma, esta investigação busca contribuir nos estudos dos grupos de simetria, organizando axiomas e teoremas. Durante o processo, quando necessário, além de livros, esta pesquisa pode recorrer a acervos como artigos científicos, dissertações, teses e

monografias.

2.2 Etapas da pesquisa e instrumentos de coleta de dados

A pesquisa foi feita em cinco etapas: a primeira teve o propósito de apresentar a história dos grupos em geral até a chegada ao grupo de simetria dos polígonos regulares; a segunda, a definição e exemplos referentes aos grupos; a terceira, a definição e algumas demonstrações sobre o grupo das permutações e a ideia de subgrupo; e a quarta, com exemplos, definição e demonstrações do grupo de simetria dos polígonos regulares; a quinta com a amostragem de sua capacidade de aplicação em diferentes áreas.

Na primeira etapa, investigamos a história dos primeiros autores que pesquisaram e criaram o estudo dos grupos. Isso serviu de base para termos uma ideia de como este estudo foi construído.

Na segunda etapa, definimos o grupo de simetria dos polígonos regulares, trazendo suas propriedades que servem de base para demonstrar se um determinado conjunto munido de uma operação realmente é um grupo.

Na terceira etapa, tratamos do grupo das permutações, que é um dos mais importantes nesta pesquisa. A partir dos conceitos falados anteriormente, provamos que este é um grupo, definindo algumas de suas generalidades. Traremos também a definição de subgrupos, assim como a forma de provar que um determinado objeto matemático é um subgrupo.

Na quarta etapa, mostramos uma prévia do nosso estudo, que é o grupo das rotações do triângulo e do quadrado. Este polígono serviu de base para o estudo de simetria dos demais polígonos regulares assim como sua generalização.

Na quinta etapa, apresentamos uma aplicação do grupo de simetria dos polígonos regulares. Essa aplicação mostrou o quanto tal estudo pode ser aplicado em diversas áreas.

Desta forma, espera-se mostrar diferentes generalidades algébricas deste grupo de simetria dos polígonos regulares, que normalmente não são exploradas de forma mais detalhada no curso de Álgebra durante a graduação. Assim, causando motivação para futuras pesquisas.

Capítulo 3

Grupo de Simetria dos Polígonos Regulares

No primeiro capítulo, foram vistas definições, teoremas e proposições do estudo de grupos que embasam os resultados referentes aos próximos dois capítulos. Nesse capítulo, veremos exemplos que ajudarão a entender e construir o Grupo de Simetria dos Polígonos Regulares. Neste caminho, veremos o Grupo de rotações do triângulo equilátero, em seguida, do quadrado e do pentágono. Como efeito de comparação, teremos como exemplo o retângulo.

A partir desses exemplos, será menos complexo definir e realizar algumas demonstrações do Grupo de Simetria dos Polígonos regulares. Vale destacar que grande parte das notações foram apresentadas no segundo capítulo. Para finalizar, será apresentado o grupo de simetria da circunferência e serão apresentadas suas respectivas propriedades simétricas.

Com tais conceitos abordados, poderemos mostrar exemplos básicos de aplicações e, posteriormente, a principal aplicação desse trabalho no terceiro capítulo. Neste, utilizaremos conceitos apresentados, por isso se dá a importância da pesquisa feita e da conversa entre os autores trabalhados anteriormente e os que serão trabalhados agora.

O primeiro exemplo do Grupo de Simetria dos Polígonos Regulares é o triângulo equilátero. Nesta seção, mostraremos as rotações deste grupo, que serão essenciais para a construção dos grupos de simetria dos demais polígonos. Para isso, primeiramente, devemos definir o que seria um triângulo equilátero.

3.1 Exemplos clássicos

Definição 3.1.1 [9] *Dado três pontos A , B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB , AC e BC chama-se triângulo ABC .*

Definição 3.1.2 *Para as aplicações, entende-se por uma figura plana um conjunto F de*

pontos de \mathbb{R}^2 .

Definição 3.1.3 *Classificamos um triângulo como equilátero se, e somente se, têm os três lados congruentes.*

Definição 3.1.4 *Dada uma figura F , uma simetria de F é uma aplicação $f : F \rightarrow F$ com as seguintes propriedades:*

1. f é uma isometria
2. f é sobrejetiva

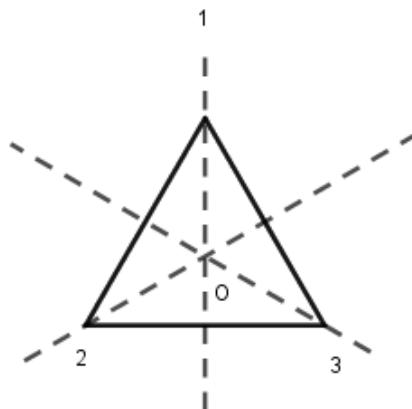
A partir dessas propriedades, com a isometria teremos uma transformação que preserva as distâncias. No ponto de vista geométrico, isso significa que após aplicar a função f , as distâncias entre quaisquer dois pontos permanecem inalteradas. Com a sobrejetividade em termos simples não existirão pontos em F que não serão atingidos pela aplicação de f .

Dadas as definições anteriores, em fim, podemos exemplificar o grupo de simetria do triângulo equilátero:

Exemplo 3.1.1 [1] *Consideremos um triângulo equilátero de vértices 1, 2 e 3. As simetrias desse triângulo, isto é, os movimentos que o levam a sobre si mesmo são, os seguintes:*

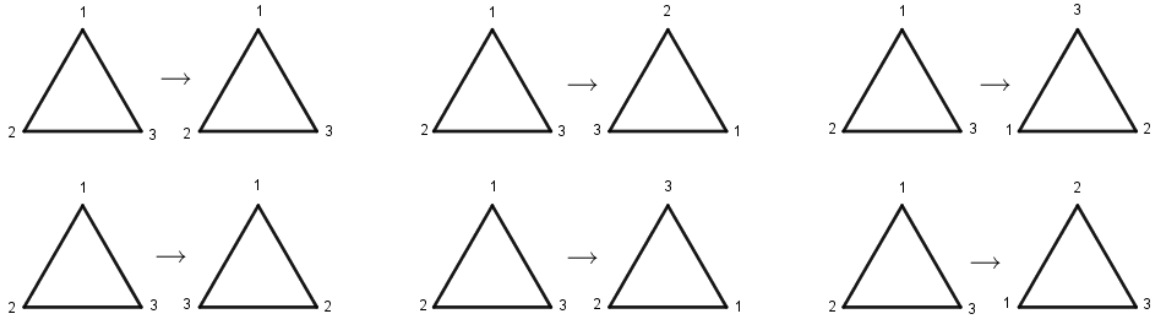
1. as rotações r_0, r_1, r_2 e r_3 de $0^\circ, 120^\circ$ e 240° em torno do centro O no sentido horário;
2. as reflexões s_1, s_2 e s_3 , as reflexões através de suas medianas.

Figura 3.1: Simetrias do triângulo equilátero



Fonte: Do Autor (2024)

Figura 3.2: Simetrias do triângulo equilátero



Fonte: Do Autor (2024)

Observação 3.1.1 *Obtemos, desta maneira, um conjunto D_3 com 6 elementos elementos:*

$$D_3 = \{r_0, r_1, r_2, s_1, s_2, s_3\}$$

Estes 6 elementos são definidos pelas seguintes permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

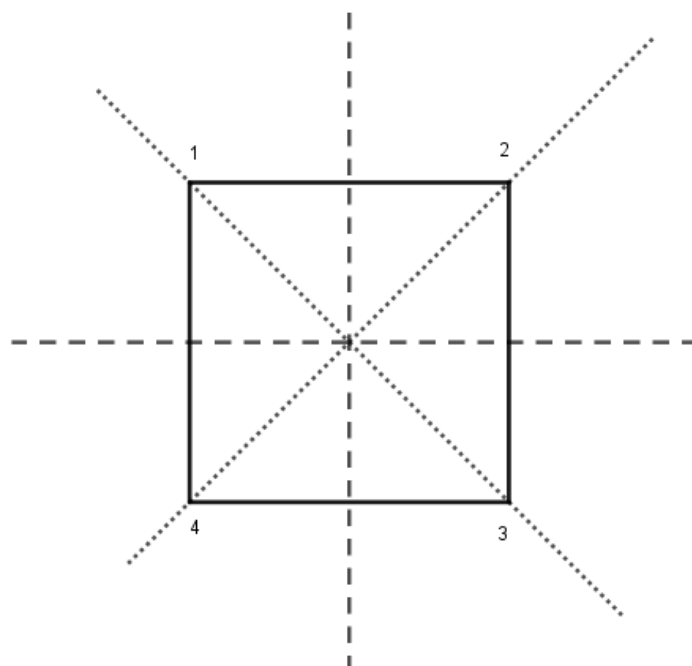
O par (D_3, \circ) , sendo "o" a operação de composição de funções em D_3 , é um grupo, porque o composto de dois elementos qualquer de D_3 é um elemento de D_3 , a operação "o" é associativa e admite elemento neutro r_0 , e todo elemento de D_3 é simetrizável. Realizando-se todas as possíveis composições, temos a seguinte tabela:

\circ	e	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
e	e	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	e	s_2	s_3	s_1
r_2	r_2	e	r_1	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	e	r_2	r_1
s_2	s_2	s_1	s_3	r_1	e	r_2
s_3	s_3	s_2	s_1	r_2	r_1	e

Observação 3.1.2 (D_3, \circ) é um grupo não abeliano, não vale a comutatividade, pois, por exemplo, $s_3 \circ s_1 \neq s_1 \circ s_3$, Esta tábua mostra que os simétricos dos elementos r_0, s_1, s_2 e s_3 são eles mesmos e que cada um dos elementos r_1 e r_2 é simétrico do outro .

Observação 3.1.3 Podemos notar que $D_3 = S_3 = 3! = 6$ elementos, chamamos de ordem de D_3 .

Figura 3.3: Simetrias do Quadrado



Fonte: Do Autor (2024)

Com o grupo de simetrias do triângulo equilátero bem definido, podemos partir para o grupo de simetria do quadrado, antes disso devemos relembrar sua definição.

Definição 3.1.5 [9] *Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos AB, BC, CD e DA interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.*

Definição 3.1.6 *Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.*

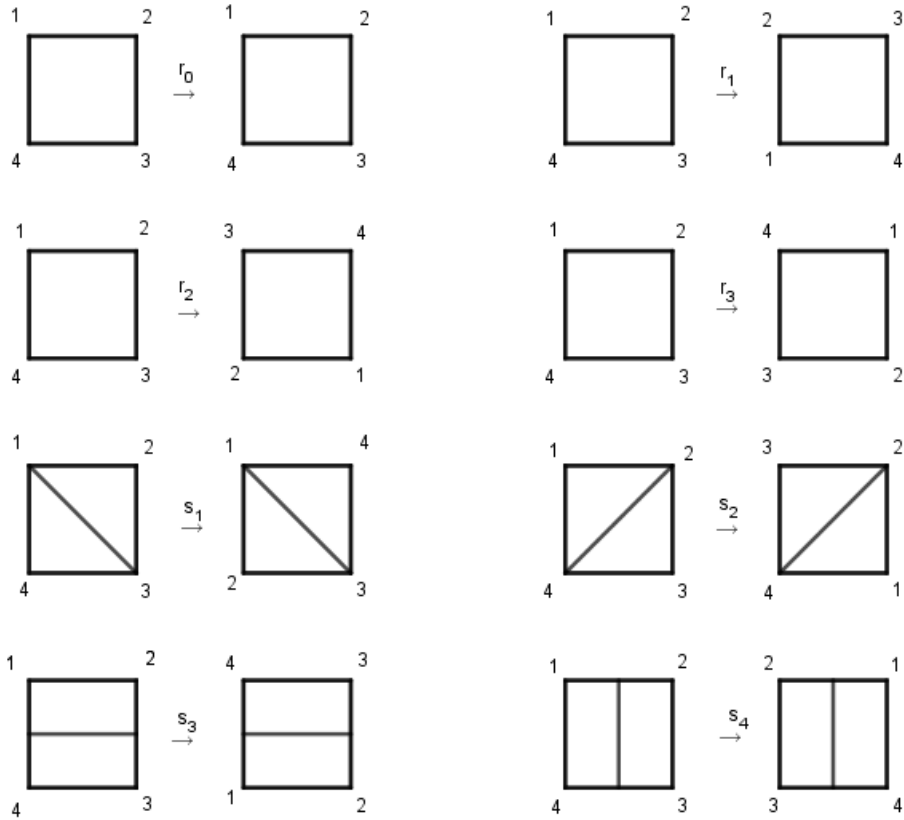
Com o quadrado definido, faremos testes quanto a sua quantidade de simetrias e se essas podem ser classificadas como um grupo.

Exemplo 3.1.2 [9] *Considere um quadrado com vértices nomeados como 1, 2, 3 e 4. As simetrias desse quadrado são as seguintes:*

1. As rotações r_0, r_1, r_2 e r_3 de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e 270° em torno do centro O no sentido anti-horário.
2. As reflexões s_1, s_2 , as reflexões através de suas diagonais;
3. As reflexões s_3 e s_4 através de suas medianas.

Observação 3.1.4 *Obtemos, desta maneira, um conjunto D_4 com 8 elementos:*

Figura 3.4: Simetrias do quadrado



Fonte: Do Autor (2024)

$$D_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

Esses 8 elementos são definidos pelas seguintes permutações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

O par (D_4, \circ) , sendo " \circ " a operação de composição de funções em D_4 , também é um grupo, porque o composto de dois elementos quaisquer de D_4 é um elemento de D_4 , a operação " \circ " é associativa e admite elemento neutro, a rotação idêntica r_0 , e todo elemento de D_4 é simetrizável. Realizando todas as possíveis composições, temos a seguinte tabela:

\circ	e	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
e	e	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_1	r_1	r_2	r_3	e	s_3	s_4	s_2	s_1
r_2	r_2	r_3	e	r_1	s_2	s_1	s_4	s_3
r_3	r_3	e	r_1	r_2	s_4	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_4	s_2	s_3	e	r_2	r_3	r_1
s_2	s_2	s_3	s_1	s_4	r_2	e	r_1	r_3
s_3	s_3	s_1	s_4	s_2	r_1	r_3	e	r_2
s_4	s_4	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2	e

Assim como no caso do triângulo, observamos que (D_4, \circ) é um grupo não abeliano. A tabela mostra que os simétricos dos elementos $r_0, r_0, s_1, s_2, s_3,$ e s_4 são eles mesmos, e cada um dos elementos r_1, r_3 é simétrico do outro.

Observação 3.1.5 *Podemos notar que $|D_4| = 8$ elementos, chamamos de ordem de D_4 . Ou seja, $|D_4| \neq |S_4| = 4! = 24$, algo diferente do que acontece com o triângulo, no qual mostraremos que foi um caso a parte.*

3.2 Generalização do Grupo Diedral

Com os exemplos dados podemos compreender melhor o grupo de simetria dos polígonos regulares, com isso, podemos generalizá-lo, apresentar suas definições, demonstrar suas principais propriedades, teoremas e lemas nesta seção. Para isso, primeiramente vamos definir o que seria um polígono regular.

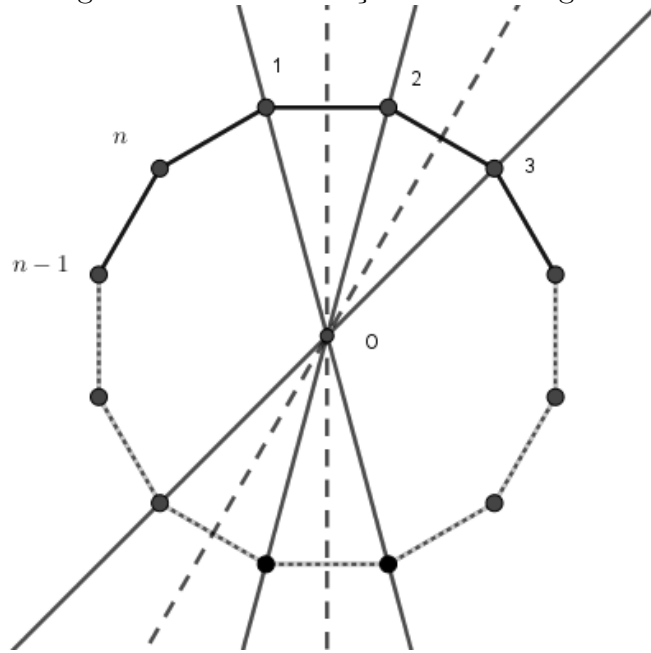
Definição 3.2.1 *Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1 , assim como $A - n, A_1$ e A_2 , chama-se polígono à reunião dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$.*

Definição 3.2.2 *Um polígono é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes todos os seus ângulos congruentes.*

Definido o que seria um polígono regular poderemos definir o grupo de simetria dos polígonos regulares.

Definição 3.2.3 \square *O conjunto D_n das simetrias de um polígono regular de n lados é um grupo com a operação de composição de aplicações. O grupo (D_n, \circ) também é conhecido como Grupo Diedral de ordem $2n$ e é composto por n rotações de $\frac{k2\pi}{n}$ radianos em torno do centro de gravidade, para $k \in \{0, \dots, n-1\}$, e por n reflexões em torno dos eixos de simetria do polígono.*

Figura 3.5: Generalização de um Polígono



Fonte: Do Autor (2024)

O Grupo Diedral, ou Grupo de Simetrias, pode ser entendido como um Grupo de Permutações. Isso ocorre porque existe uma bijeção f de D_n em D_n , e os movimentos de rotação e reflexão de D_n são representados por permutações, como vimos nos exemplos [3.1.1](#) e [3.1.2](#).

Definiremos a seguir as transformações deste polígono. Para isso, tomaremos um polígono regular P_n , onde n é o número de lados do polígono ($n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$). O centro de gravidade é o ponto O , e existem n retas no espaço que passam pelas mediatrizes e diagonais (eixos de simetria) do polígono.

As transformações espaciais que preservam o polígono regular de n lados são:

- (i) Rotações em torno do centro: Chamadas de $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$, são as rotações de $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)2\pi}{n}$ radianos em torno do centro O , no sentido anti-horário.
- (ii) Reflexões através de suas medianas: Chamadas de s_1, s_2, \dots, s_n , são as reflexões espaciais de π radianos em torno das retas (eixos de simetria) S_1, S_2, \dots, S_n .

Portanto, D_n é o conjunto formado por n rotações e n reflexões:

$$D_n = \{r_0, \dots, r_{n-1}, s_1, \dots, s_n\}.$$

Sejam R_n o conjunto de rotações do polígono regular de n lados e a operação de composição de aplicações.

Podemos observar que r_1 gera R_n :

¹As definições propriedades e demonstrações desta seção estão de acordo com (CANÇADO, 2016)

$$\begin{aligned}
e = r_0 = r_1^0 &\text{ é a rotação de ângulo } 0; \\
r_1 = r_1^1 &\text{ é a rotação de ângulo } \frac{2\pi}{n}; \\
r_2 = r_1^2 &\text{ é a rotação de ângulo } \frac{4\pi}{n}; \\
r_3 = r_1^3 &\text{ é a rotação de ângulo } \frac{6\pi}{n}; \\
&\vdots \\
r_{n-1} = r_1^{n-1} &\text{ é a rotação de ângulo } \frac{(n-1)2\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Segue que $r_1^0 = e$, $r_1^2 = r_1 \circ r_1 = r_2$, $r_1^3 = r_1^2 \circ r_1 = r_3$, \dots , $r_1^{n-1} = r_1^{n-2} \circ r_1 = r_{n-1}$. Assim, R_n é o conjunto das potências de r_1 :

$$R_n = \{e, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{n-1}\}.$$

Essa separação/fragmentação do que mais tarde chamaremos de D_n servirá para melhor compreensão das demonstrações seguintes.

Proposição 3.2.1 *O conjunto R_n com a operação de composição de aplicações é um grupo abeliano*

. **Demonstração:**

(i) Provaremos que a operação de composição está bem definida:

$$\circ : R_n \times R_n \rightarrow R_n, \quad (r_i^1, r_j^1) \mapsto r_{i+j}^1$$

- Para $i + j < n$: Esse caso decorre de (#).
 - Para $i + j > n$: Usando o Algoritmo da Divisão, temos que $\exists q, r \in \mathbb{N}$ tal que $i + j = qn + r$, com $0 \leq r < n$. Então, $r_i^1 \circ r_j^1 = r_{i+j}^1 = r_{nq+r}^1 = r_n^q \circ r_r^1 = (r_n^1)^q \circ r_r^1 = e^q \circ r_r^1 = r_r^1 \in R_n$.
- (ii) Associatividade: Sejam $r_i^1, r_j^1, r_k^1 \in R_n$. Provaremos que $(r_i^1 \circ r_j^1) \circ r_k^1 = r_i^1 \circ (r_j^1 \circ r_k^1)$. Temos que $(r_i^1 \circ r_j^1) \circ r_k^1 = r_{i+j}^1 \circ r_k^1 = r_{i+j+k}^1 = r_i^1 \circ r_{j+k}^1 = r_i^1 \circ (r_j^1 \circ r_k^1)$.
- (iii) Elemento neutro: Seja $r_i^1 \in R_n$, com $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Então, $\exists e \in R_n$ tal que $r_i^1 \circ e = e \circ r_i^1 = r_i^1$. Como $r_i^1 \circ r_0^1 = r_i^1 \Rightarrow e = r_0^1$.
- (iv) Elemento inverso: Tomemos r_i^1 , com $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Note que $r_i^1 \circ r_{n-i}^1 = r_i^1 \circ r_n^1 \circ r_{-i}^1 = r_i^1 \circ e \circ r_{-i}^1 = r_i^1 \circ r_{-i}^1 = e$. Assim, r_{-i}^1 ou r_{n-i}^1 é o inverso de r_i^1 em R_n .
- (v) Comutatividade: Sejam $r_i^1, r_j^1 \in R_n$, então $r_i^1 \circ r_j^1 = r_{i+j}^1 = r_{j+i}^1 = r_j^1 \circ r_i^1$.

Sejam Re o conjunto das reflexões do polígono regular de n lados e a operação de composição de aplicações.

Observe que:

s_1 é a reflexão em torno da reta S_1 pelo vértice 1 e pelo centro O ;
 s_2 é a reflexão em torno da reta S_2 pelo vértice 2 e pelo centro O ;
 \vdots
 s_n é a reflexão em torno da reta S_n pelo vértice n e pelo centro O .

Podem existir dois casos em relação a n : ele pode ser ou ímpar ou par, como veremos a seguir:

Observação 3.2.1 *O caso acima ocorre se n for ímpar. Caso n seja par, temos:*

Note que:

s_1 é a reflexão em torno da reta S_1 pelo vértice 1 e pelo centro O ;
 s_2 é a reflexão em torno da reta S_2 pelo vértice 2 e pelo centro O ;
 s_3 é a reflexão em torno da reta S_3 pelo vértice 3 e pelo centro O ;
 \vdots
 $s_{\frac{n}{2}}$ é a reflexão em torno da reta $S_{\frac{n}{2}}$ pelo vértice $\frac{n}{2}$ e pelo centro O ;
 $s_{\frac{n}{2}+1}$ é a reflexão em torno da reta $S_{\frac{n}{2}+1}$ que intercepta o segmento $1n$ e o centro O ;
 $s_{\frac{n}{2}+2}$ é a reflexão em torno da reta $S_{\frac{n}{2}+2}$ que intercepta o segmento 12 e o centro O ;
 \vdots
 s_n é a reflexão em torno da reta S_n que intercepta o segmento $(\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2})$ e o centro O .

Observação 3.2.2 *Se n for ímpar, existem n retas do espaço que passam pelas mediatrizes do polígono. E, se n for par, existem $\frac{n}{2}$ retas do espaço que passam pelas mediatrizes e $\frac{n}{2}$ retas que passam pelas diagonais do polígono.*

Para facilitar nossa generalização, tomaremos s como a reflexão de π radianos em torno da reta S_1 pelo vértice 1 e pelo centro do polígono. Assim, cada reflexão pode ser escrita como combinação de s com as potências de r_1 . Segue que:

$$Re = \{s, s \circ r_1, s \circ r_1^2, \dots, s \circ r_1^{n-1}\}.$$

No entanto, Re não é um grupo com a composição de aplicações. Observe que esse conjunto não possui um elemento neutro: $s^2 = s \circ s = r_0 = e \notin Re$.

D_n é definido como $R_n \cup R_e$, sendo gerado por s e r_1 :

$$D_n = \{e, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{n-1}, s, s \circ r_1, s \circ r_1^2, \dots, s \circ r_1^{n-1}\}.$$

A seguir, mostraremos que (D_n, \circ) é um grupo (não abeliano). Para isso, usaremos a rotação r_1 e a reflexão s , os geradores de D_n :

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os lemas [3.2.1](#) e [3.2.2](#) não serão demonstrados por conta do aprofundamento desta pesquisa, no entanto, são de grande importância como resultado para proposições seguintes.

Lema 3.2.1 *A igualdade $s \circ r_1^r = r_1^{n-r} \circ s$ é válida em D_n .*

Lema 3.2.2 *A composição é uma operação em D_n .*

Proposição 3.2.2 *D_n é um grupo (não abeliano) com a composição de funções.*

Demonstração:

- (i) Vale a associatividade em D_n , pois é decorrente da operação composição.
- (ii) D_n possui um elemento neutro, em que $r_0 = e$.
- (iii) Existe um elemento inverso:

Provaremos que $r_1^i \circ s_u \in D_n$ possui um inverso. Desta forma, observaremos os casos a seguir:

- (1) Para $u = 0$: Se $r_1^i \circ s_0 = r_1^i$, então r_1^{n-i} . Basta verificarmos que $r_1^i \circ r_1^{n-i} = e$.
- (2) Para $u = 1$: Como $r_1^i \circ s \circ r_1^i \circ s = r_1^i \circ r_1^{n-i} \circ s \circ s = r_1^n \circ s^2 = e \circ e = e$. Portanto, o inverso de $r_1^i \circ s$ é ele mesmo.

Todavia, não vale a comutatividade. Pois, pelo lema [3.2.1](#), temos que $s \circ r_1 = r_1^{n-1} \circ s = r_1^{-1} \circ s \neq r_1 \circ s$, para $n = 1$. Logo, (D_n, \circ) é um grupo (não abeliano).

Proposição 3.2.3 *O par (D_n, \circ) é um grupo (não abeliano) com $2n$ elementos.*

Demonstração:

Basta tomarmos $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $u, v \in \{0, 1\}$ tais que $r_1^i \circ s^u = r_1^j \circ s^v$.

Provaremos que $i = j$ e $u = v$.

Segue que $r_1^i \circ s^u = r_1^j \circ s^v \Rightarrow (r_1^j)^{-1} \circ r_1^i \circ s^u = (r_1^j)^{-1} \circ r_1^j \circ s^v \Rightarrow (r_1^j)^{-1} \circ r_1^i \circ s^u = s^v \Rightarrow (r_1^j)^{-1} \circ r_1^i \circ s^u \circ (s^u)^{-1} = s^v \circ (s^u)^{-1} \Rightarrow (r_1^j)^{-1} \circ r_1^i = s^v \circ (s^u)^{-1} \Rightarrow r_1^{-j} \circ r_1^i = s^v \circ s^{-u} \Rightarrow r_1^{i+(-j)} = s^{v+(-u)}$.

Se $u = v$, então $s^{v+(-u)} = e \in \{e, r_1^1, \dots, r_1^{n-1}\}$. Por outro lado, se $u \neq v$, logo $s^{v+(-u)} = s \notin \{e, r_1^1, \dots, r_1^{n-1}\}$, o que contradiz o fato de $r_1^{i+(-j)} = s^{v+(-u)}$. Daí, $u = v$ e $r_1^i = r_1^j$, e, portanto, $i = j$. Logo, D_n possui $2n$ elementos, sendo dois a dois distintos.

A partir dessas generalizações foi possível organizar e compreender melhor a formalização algébrica das simetrias dos polígonos regulares. Desta forma no seguinte capítulo abordaremos a potencialidade de aplicação deste conhecimento.

Capítulo 4

Aplicação

Como mencionado anteriormente, a simetria se apresenta como um princípio básico para as leis da natureza. São diversos os exemplos vistos, como, por exemplo, um floco de neve que apresenta a forma hexagonal perfeita. Outro exemplo seria de uma borboleta que apresenta simetria em suas asas.

A grande questão é que, quando falamos de simetria, geralmente estamos falando de uma versão idealizada da figura. Algo que é mais fácil de se imaginar em relação aos polígonos regulares por conta de sua "perfeição". Desta forma, na natureza, muitas vezes os objetos possuem apenas simetrias aproximadas a polígonos regulares.

A partir desta noção de aproximação, surgiram diversas aplicações matemáticas em outros ramos dos grupos de simetria. Nos últimos cinquenta anos, muito progresso foi alcançado na física quântica por conta do conceito de simetria nas partículas elementares.

FRENKEL (2014) cita como um dos grandes exemplos de aplicação o grupo $SU(3)$, conhecido como o *Special Unitary Group of Degree 3*, consiste em matrizes unitárias 3×3 com determinante igual a 1. Matematicamente, uma matriz U pertence a $SU(3)$ se ela tiver as seguintes propriedades:

1. U é uma matriz 3×3 complexa.
2. $U^\dagger U = I$, onde U^\dagger representa a matriz adjunta de U .
3. $\det(U) = 1$, onde $\det(U)$ é o determinante de U .

Em termos físicos, as transformações $SU(3)$ descrevem as mudanças nas propriedades dos quarks enquanto eles interagem sob a força forte mediada pelos glúons. Essas transformações são importantes para entender a cromodinâmica quântica (QCD), que é a teoria que descreve a interação forte.

O grupo $SU(3)$ é usado para representar simetrias de cor nas interações quark-quark, onde "cor" é uma propriedade de carga associada à força forte. As oito geradoras hermitianas do $SU(3)$ correspondem aos oito glúons que mediam a interação forte entre os quarks. A teoria $SU(3)$ é uma parte essencial do Modelo Padrão da física de partículas.

Durante as pesquisas na produção deste trabalho, foram vistas diversas aplicações do grupo de simetria dos polígonos regulares, algo que enfatiza a ideia de Klein dos grupos de simetria possuírem papel unificador dentro da matemática.

Desta forma, mostrou-se que a Simetria se apresenta muitas vezes como otimizador na resolução e interpretações de problemas matemáticos. Neste trabalho não nos preocuparemos em provar a relação entre a simetria a esta otimização, mas em apresentar exemplos que enfatizam esta ideia. A seguir vemos um exemplo clássico matemático.

Exemplo 4.0.1 *Dado um valor constante para a área de um retângulo, encontre as dimensões desse retângulo que resultem no menor perímetro possível.*

Em outras palavras, o desafio é otimizar as dimensões do retângulo, mantendo sua área fixa, de modo a minimizar a soma dos comprimentos de seus lados. Esse é um problema comum em otimização e pode ser abordado usando técnicas matemáticas, como cálculo diferencial.

A função de perímetro P de um retângulo é dada por:

$$P = 2L + 2W$$

A área A do retângulo é dada por:

$$A = L \times W$$

Vamos considerar o problema de minimizar o perímetro sujeito à restrição de área constante ($A = k$).

A expressão para L em termos de W com a restrição de área constante é:

$$L = \frac{k}{W}$$

Substituindo isso na fórmula do perímetro, obtemos:

$$P = 2 \left(\frac{k}{W} \right) + 2W$$

Para minimizar P , derivamos em relação a W e igualamos a zero:

$$\frac{dP}{dW} = -\frac{2k}{W^2} + 2 = 0$$

Isso leva à solução:

$$W = \sqrt{k}$$

Substituindo W de volta na expressão para L , encontramos:

$$L = \sqrt{k}$$

Portanto, as dimensões que minimizam o perímetro, sujeitas à restrição de área constante, são $L = \sqrt{k}$ e $W = \sqrt{k}$, indicando que um quadrado é a forma que minimiza o perímetro para uma área constante.

Com isso percebemos que a resposta para a otimização da problemática é dada pelo retângulo que possui a maior quantidade de propriedades simétricas. Podemos comparar desta forma o Grupo de simetria do quadrado que foi apresentado anteriormente com o grupo de simetria do retângulo.

Exemplo 4.0.2 *Considere um retângulo de vértices 1, 2, 3 e 4. As simetrias desse retângulo são as seguintes:*

1. As rotações r_0 e r_1 de 0° e 180° em torno do centro O no sentido anti-horário;
2. As reflexões s_1 e s_2 através de suas medianas.

Observação 4.0.1 *Obtemos, desta maneira, um conjunto D_2 com 4 elementos: $D_2 = \{r_0, r_1, s_1, s_2\}$*

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

A partir das operações temos a seguintes tabela:

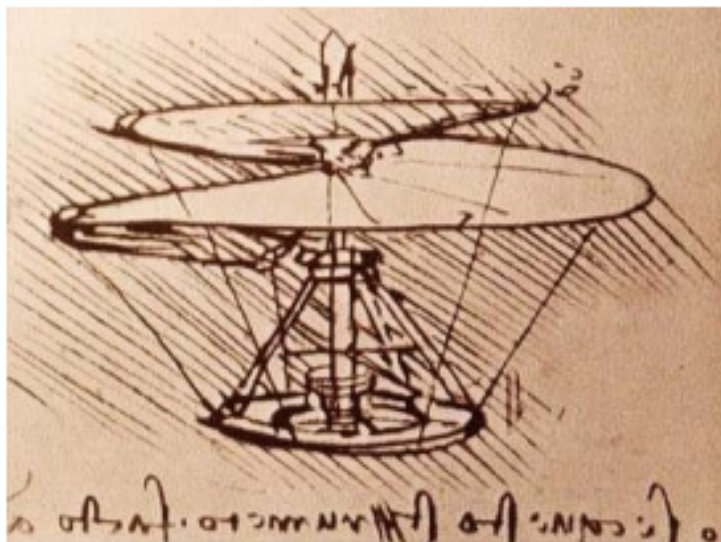
\cdot	e	r_1	s_1	s_2
e	e	r_1	s_1	s_2
r_1	r_1	e	s_2	s_1
s_1	s_1	s_2	e	r_1
s_2	s_2	s_1	r_1	e

Comparando os dois grupos percebemos que o número de elementos do Grupo de Simetria do Retângulo é menor que o do Grupo de Simetria do Quadrado. Mostrando que pode existir uma relação entre o problema e esse presente estudo. As aplicabilidades, no geral, mostraram-se bastante avançadas para um trabalho de conclusão da graduação; com isso, buscou-se aplicações mais simples e presentes no nosso cotidiano. Assim, a partir das pesquisas feitas, foi possível encos aplicações do grupo de simetria dos polígonos regulares nos drones. Essa aplicação será detalhada nas próximas seções.

4.1 Introdução aos drones

Nos últimos anos se popularizaram pelo mundo um novo tipo de veículo, os drones. Isso se deu pelo avanço da tecnologia de miniaturização de sensores e processadores. No geral esses aparelhos tem sido desenvolvidos para diversão, propósito comercial ou até mesmo para pesquisa.

Figura 4.1: “Parafuso aéreo”, projeto de Leonardo Da Vinci



Fonte: Leishman(2000)

Historicamente o primeiro projeto de aeronave de asas rotativas é atribuído geralmente a Leonardo Da Vinci Leishman(2000). Embora seja apenas uma ideia, podemos perceber que nesse projeto já se pensava na simetria, que nesse caso é a radial. Isso é pensado também na divisão homogênea do peso que ajuda a garantir a estabilidade do objeto durante o voo.

Algo que chama atenção nos drones é justamente é o seu formato físico. No geral os drones possuem forma de polígonos regulares. No comércio é possível encontrar modelos de drones com 3, 4, 6 e 8 hélices. Outro fato que pode ser observado é posicionamento dos rotores geralmente, se dá nas extremidades das hastes de estrutura do drone que podem ser idealizados como os vértices de um polígono regular. Podemos ver a seguir a tabela de classificação dos drones.

Tabela 4.1: Classificação quanto ao número de motores.

Número de Motores	3	4	6	8
Designação	Tricóptero	Quadcóptero	Hexacóptero	Octacóptero

Fonte: Do Autor, 2023

Demolinari (2016) que em seu trabalho traz a construção de um hexacóptero nnos mostra que principal influência do número de motores é a força de propulsão ou seja a

força total de sustentação do drone. Desta forma, drones com 3 ou 4 motores têm forças de sustentação menores que os com 6 ou 8 motores. Além disso se tem a questão de segurança do aparelho, em caso de um dos motores falhar, quanto maior o número de motores, menor a chance do drone cair.

Por conta de termos explorado do Grupo de Simetria do quadrado, iremos dar enfoque nos quadricópteros. A partir da análise de alguns autores perceberemos onde são aplicados os estudos algébricos e geométricos na construção e voo deste tipo de drone. Além disso será evidenciada, novamente, a simetria como fator importante no processo de otimização.

4.2 O quadcóptero

Para entendermos as aplicações algébricas presentes no drone, primeiramente devemos conhecer qual a sua estrutura física. Para que o voo aconteça são de extrema importância, além dos motores, a bateria, os sensores, o controlador e a divisão de seu peso.

Figura 4.2: Quadcóptero utilizado para encomendas



Fonte: DHL (2016)

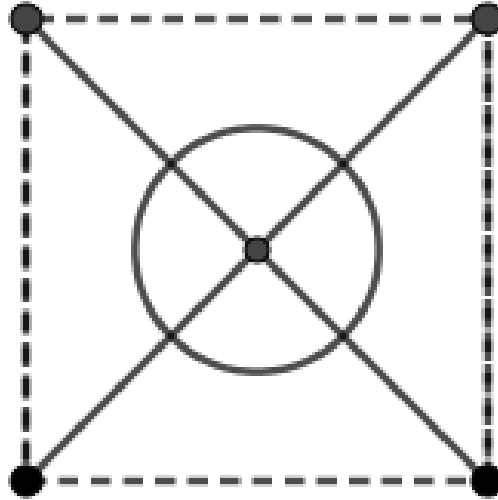
Cavallaro (2019) traz em seu trabalho como hipótese que o centro de gravidade do quadricóptero (drone com quatro hélices) coincide com seu centro geométrico e sua distribuição de massa é simétrica em relação aos dois eixos ortogonais entre si que passam pelo centro geométrico e têm direção horizontal.

A partir da ideia deste autor e outros que abordam tal assunto, surgiu o questionamento de como os grupos de simetria dos polígonos regulares podem influenciar na construção de um drone.

Demolinari (2016) que em seu trabalho traz a construção de um drone e nos mostra que principal influência do número de motores é a força de propulsão, ou seja, a força total de sustentação do drone. Desta forma, drones com 3 ou 4 motores têm forças de sustentação menores que os com 6 ou 8 motores. Além disso se tem a questão de segurança do aparelho, em caso de um dos motores falhar, quanto maior o número de motores, menor a chance do drone cair.

No entanto, esse não é o único lado levado em consideração. Quanto maior o número de hélices, maior será o consumo de energia. Desta forma, o quadcóptero apresenta-se

Figura 4.3: Representação idealizada do quadrcóptero



Fonte: Do Autor (2024)

como otimizador levando em conta aspectos como segurança e economia de energia. Não atoa este modelo é o mais popular nas vendas para o público amador.

4.3 Movimentos do Quadrcóptero

A idealização dos movimentos do quadrcóptero necessita de estudos de física básica. Ao mostrarmos os aspectos físicos enfatizaremos a relação da simetria como aspecto conservativo no movimento do drone de 4 hélices. Neste modelo desprezaremos o atrito para simplificação dos cálculos.

Seguiremos a ideia de Cavallaro (2019) que definiu o centro de gravidade do quadrcóptero como o centro geométrico e sua distribuição de massa é simétrica em relação aos dois eixos ortogonais entre si que passam pelo centro geométrico e têm direção horizontal.

Silva (2015) ao no teste de voo verificou a necessidade de ter uma melhor distribuição dos componentes do quadrcóptero a fim de deixá-lo o mais simétrico possível, evitando assim que o mesmo fique inclinado quando não deveria estar.

Esses detalhes simplificam a interpretação da modelagem utilizada e enfatizam a necessidade do estudo de simetria no voo do drone. Desta forma os cálculos feitos terão como base as leis de Newton e o conhecimento apresentado nos capítulos anteriores.

[15] Pela 2ª Lei de Newton, ou princípio Fundamental da Dinâmica:

“Forças são interações entre corpos que podem provocar variações em sua velocidade”.

No enunciado da lei de Newton, o termo tanto pode representar uma força como a força que resulta da soma de um conjunto de forças (força resultante).

Sendo a força uma grandeza vetorial, da mesma forma que a aceleração, podemos escrever a lei de Newton, numa notação vetorial:

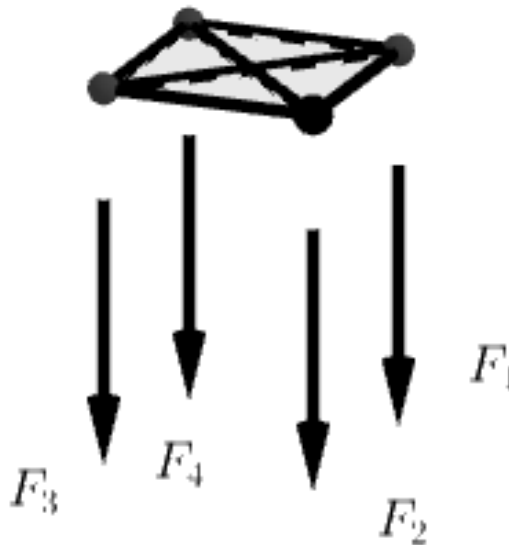
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Esta equação, onde $\sum \vec{F}$ representa a soma vetorial de todas as forças aplicadas, m é a massa do quadróptero e \vec{a} é a sua aceleração, oferece a base para a análise dos movimentos do drone. Por meio dessa relação, podemos desdobrar as forças envolvidas e entender como influenciam o comportamento dinâmico do quadróptero durante o voo.

4.3.1 Movimentos verticais

O movimento vertical de um drone é uma faceta fundamental de sua capacidade de manobra, desempenhando um papel crucial em diversas situações. Esse deslocamento ocorre quando o drone realiza a ascensão, descida ou permanece estacionário em altitudes específicas.

Figura 4.4: Representação do movimento vertical de um quadróptero



Fonte: Do Autor (2024)

Quando o drone sobe, ele utiliza seus rotores para gerar uma força ascendente que contrapõe a força da gravidade:

$$\sum \vec{F}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Para que ocorra essa subida se faz necessário que a força de subida $\sum \vec{F}_s$ seja maior que a força gravitacional \vec{F}_g :

$$\vec{F}_s > \vec{F}_g$$

Para garantir que o quadrcóptero suba de forma estável a força feita pelas hélices $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ e \vec{F}_4 seja igual:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4$$

Quando o drone desce, ele utiliza seus rotores para gerar uma força controlada que contrapõe a força da gravidade:

$$\sum \vec{F}_d = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Para que ocorra essa decida se faz necessário que a força de descida $\sum \vec{F}_d$ seja menor que a força gravitacional \vec{F}_g :

$$\vec{F}_d < \vec{F}_g$$

Para garantir que o quadrcóptero desça de forma estável a força feita pelas hélices $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ e \vec{F}_4 seja igual:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4$$

Neste caso a força gravitacional não pode ser muito maior que a força de descida, se isso acontecer o drone sofrerá danos durante o contato com o chão.

Quando o drone fica parado no ar (estacionário), ele utiliza seus rotores para gerar uma força controlada igual a força da gravidade:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_g$$

Para garantir que o quadrcóptero se estabilize a força feita pelas hélices $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ e \vec{F}_4 seja igual:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4$$

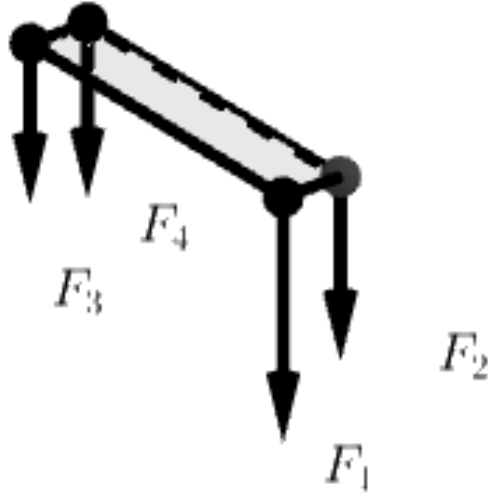
Esses movimentos são possíveis por conta da simetria presente no drone e na distribuição de seu peso, o que possibilita a elevação, descida e parada. Além desse fator, outra questão que pode ser observada é que como vimos no exemplo [4.0.1](#) o retângulo de menor perímetro é um quadrado. Desta forma, além de um drone na forma de um quadrado possibilitar maior estabilidade, esse formato otimiza a utilização de material.

4.3.2 Movimentos pelas laterais

Ao se movimentar para os lados o quadrcóptero realiza alguns movimentos de conservação que são propiciados através de sua simetria. Imaginemos uma força que chamaremos de força lateral $\sum \vec{F}_L$ esta força é resultado da somatória das forças das quatro hélices do drone, como podemos ver na [figura 4.5](#).

$$\sum \vec{F}_L = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Figura 4.5: Representação do movimento horizontal pela mediana



Fonte: Do Autor (2024)

Diferentemente da movimentação vertical, nesse caso as forças das quatro hélices não são iguais. Neste caso a força das duas hélices presentes no lado pelo qual o drone irá se movimentar deve ser menor que as demais hélices, de tal modo que:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_4 < \vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

Essa condição persiste até que o drone atinja um ângulo específico. Ao atingir esse ângulo, as forças das hélices se igualam, permitindo que o quadróptero se mova na direção inclinada.

Ao concluir o movimento lateral, a discrepância entre as forças das hélices é compensada, e o drone retorna ao seu estado de equilíbrio. Assim, é possível realizar até quatro movimentos laterais através de seus lados.

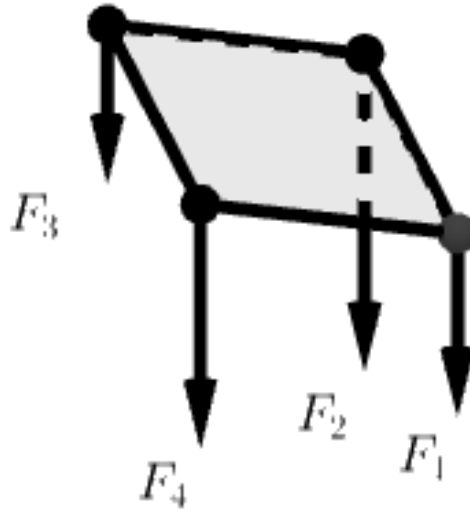
4.3.3 Movimentos diagonais

$$\vec{F}_3 < \vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_4$$

Essa condição persiste até que o drone atinja um ângulo específico. Ao atingir esse ângulo, as forças das hélices se igualam, permitindo que o quadróptero se mova na direção inclinada.

Ao concluir o movimento diagonal, a discrepância entre as forças das hélices é compensada, e o drone retorna ao seu estado de equilíbrio. Assim, existem 4 movimentos possíveis pelas diagonais, isso dependendo da hélice pela qual ocorrerá a inclinação.

Figura 4.6: Representação do movimento horizontal pelo vértice



Fonte: Do Autor (2024)

Ao se movimentar pelas diagonais o quadricóptero realiza alguns movimentos de conservação que são propiciados através de sua simetria. Imaginemos uma força que chamaremos de força diagonal $\sum \vec{F}_D$ esta força é resultado da somatória das forças das quatro hélices do drone, como podemos ver na figura [4.6](#).

$$\sum \vec{F}_D = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Em relação a movimentação pela lateral, existe em comum a força das quatro hélices que não são iguais. A grande diferença é que uma das hélices terá uma força menor que as outras três, de modo que:

$$\vec{F}_3 < \vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_4$$

Essa condição persiste até que o drone atinja um ângulo específico. Ao atingir esse ângulo, as forças das hélices se igualam, permitindo que o quadricóptero se mova na direção inclinada.

Ao concluir o movimento diagonal, a discrepância entre as forças das hélices é compensada, e o drone retorna ao seu estado de equilíbrio. Assim, existem 4 movimentos possíveis pelas diagonais, isso dependendo da hélice pela qual ocorrerá a inclinação.

4.3.4 Algumas percepções

No que diz respeito aos movimentos verticais, compreendemos que a ascensão, descida e a permanência estacionária são governadas pela interação complexa entre as forças

geradas pelos rotores e a gravidade. Durante a subida, a soma das forças das hélices deve superar a força gravitacional, garantindo estabilidade ao manter a igualdade entre as forças individuais. Da mesma forma, a descida controlada ocorre quando a força descendente é menor que a força gravitacional. No estado estacionário, a estabilidade é mantida pela igualdade de forças das hélices com a força gravitacional.

No que concerne aos movimentos laterais, o drone demonstra uma capacidade única de se deslocar para os lados, sustentada por princípios de conservação. A força lateral resulta da combinação das quatro hélices, mas ao contrário dos movimentos verticais, as forças não são iguais. Para inclinar o drone na direção desejada, as forças das duas hélices no lado correspondente são ajustadas para serem menores, permitindo o movimento lateral inclinado. Essa inclinação persiste até um ângulo específico, onde as forças se igualam, possibilitando o retorno ao equilíbrio.

Já nos movimentos diagonais, o drone novamente faz uso de sua simetria para realizar deslocamentos inclinados. A força diagonal, resultante da soma das forças das hélices, é ajustada de modo que uma hélice tenha uma força menor que as outras. Isso provoca a inclinação do drone até atingir um ângulo crítico, momento em que as forças se igualam e o drone pode se movimentar diagonalmente com estabilidade.

Em ambos os casos, a simetria do drone e a distribuição de peso são fatores cruciais para a estabilidade desses movimentos. A escolha de uma forma quadrada não apenas otimiza a estabilidade, mas também utiliza eficientemente o material, destacando a importância do design na funcionalidade e desempenho desses dispositivos aéreos. Essas análises oferecem uma compreensão aprofundada dos princípios físicos e mecânicos subjacentes aos movimentos de um drone, essenciais para o desenvolvimento e controle eficiente desses equipamentos.

Podemos destacar que a formalização do estudo de grupos favorece na compreensão das movimentações feitas. Além disso, fazendo comparação com os momentos verticais percebemos que o quadróptero realiza 8 movimentos verticais. no exemplo [3.1.2](#) vimos que o quadrado possui 8 simetrias, sendo 4 pelos vértices e 4 pelos lados. Sendo M_{v_4} o conjunto de movimentos verticais de um quadróptero:

$$M_{v_4} = \{l_1, l_2, l_3, l_4, d_1, d_2, d_3, d_4\}$$

Ao pensarmos no drone de 3 hélices, este teria 6 movimentos, sendo 3 pelos vértices e 3 pelos lados. Desta forma para um drone de n hélices ele terá n movimentos pelos vértices e n movimentos pelos lados, ou seja, $2n$ movimentos, assim que nem a quantidade de elementos do grupo de simetria de um polígono de n lados.

$$M_{v_n} = \{l_1, l_2, \dots, l_n, d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

Isso nos mostra que quanto maior o número de hélices, melhor se torna a estabilidade do drone e sua capacidade de se movimentar. No entanto, isso causa aumento do custo de

produção e gasto de energia. Desta forma a quantidade de hélices é distinguida de acordo com a utilidade do equipamento.

Evidenciamos que esta pesquisa foi apenas um exemplo que pode ser expandido, pois tratamos aqui de uma idealização do quadróptero. A expansão deste estudo trataria de outros aspectos presentes neste aparelho como bateria, motor, carenagem, além de desconsiderar aspectos como a resistência do ar.

Contudo foi evidenciado que podemos aplicar o conhecimento de grupos de simetria dos polígonos em diferentes modelos de conservação físicos. Esse tipo de estudo desataca a importância da base matemática no desenvolvimento dos mais diferentes tipos de tecnologia. Nessa perspectiva quando mais compreendermos a matemática e suas aplicações maiores serão os avanços científicos.

Considerações Finais

Diante do exposto, torna-se evidente que a jornada de pesquisa sobre os grupos de simetria dos polígonos regulares não apenas proporcionou um aprofundamento no entendimento matemático, mas também revelou a notável extensão de suas aplicações práticas. A matemática, como linguagem da natureza, desvelou-se através da simetria, e os grupos algébricos surgiram como ferramentas fundamentais para formalizar e transformar o conhecimento empírico em ciência.

Com as investigações feitas foi possível provar as ideias propostas no início da pesquisa. Embora a ideia original fosse apenas de realizar as construções algébricas deste tema, ao longo do tempo surgiu a oportunidade de mostrar as potencialidade da aplicação deste conteúdo, algo que foi realizado.

A escolha de explorar os grupos de simetria dos polígonos regulares, embora não seja comum na graduação, revelou-se uma oportunidade valiosa para enriquecer a literatura científica. A aplicação desses conceitos em estudos contemporâneos, como a teoria da conservação na Física, destaca a importância prática desses conhecimentos.

Os objetivos propostos relacionados a álgebra foram respondidos através da base proporcionada no referencial teórico e nas generalizações do capítulo 3. A aplicação prática, é exemplificada pela aplicação da simetria no voo de um drone, o que mostra de maneira tangível a amplitude das implicações desses estudos o que é contemplado no capítulo 4.

Portanto, este trabalho não apenas contribui teoricamente para a compreensão dos grupos de simetria dos polígonos regulares, mas também destaca sua aplicabilidade em contextos práticos, como a teoria da conservação na Física. Ao apresentar uma abordagem aprofundada, pretende-se não apenas enriquecer o conhecimento matemático, mas também despertar o interesse para novas investigações nessa área.

Assim, a pesquisa realizada representa não apenas um ponto de chegada, mas também um ponto de partida para futuras descobertas e aprofundamentos neste campo fascinante da matemática. Com isso podem ser desenvolvidos estudos futuros quanto a otimização através de polígonos regulares, estudos algébricos e geométricos de partículas subatômicas, proporcionando assim amostra da relação entre a os conceitos algébricos de simetria e a natureza.

Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, Edgard. **Teoria dos Grupos**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1985.
- [2] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3^a ed. São Paulo: Edigar Blucher Ltda, 2012.
- [3] CANÇADO, Ana Paula. **Grupo Diedral**: o estudo de grupos de simetrias em polígonos regulares. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei, Minas Gerais.
- [4] CAVALLARO, Silvio Luis Hori. **Modelagem, simulação e controle VANT do tipo quadricóptero**. 2019. Dissertação de mestrado (Engenharia Mecânica) - Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [5] CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução: Sandra Maria Mallmann da Rosa. 5^a ed. Porto Alegre: Artmed, 2021.
- [6] DOMINGUES, H. H; IEZZI, G. **Álgebra moderna**: volume único. 5^a ed. São Paulo: Atual, 2018.
- [7] DEMOLINARI, Humberto Cascardo. **Projeto de construção de um hexacóptero**. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia Mecânica) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro.
- [8] DHL, Site oficial da empresa. Disponível em: <<http://www.dhl.com/en.html>>. Acesso em 20 de Dezembro de 2023.
- [9] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9**: Geometria Plana. 9^a ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [10] FRENKEL, E. **Amor e matemática**: o coração da realidade escondida. Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2014.
- [11] GONLÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. 6^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

- [12] KLEINER, Israel. **The Evolution of Group Theory: A Brief Survey**. Mathematics Magazine, 1947, 59^a. ed, 4 de Outubro de 1986, p. 195-215. Disponível em: <<https://www.math.lsu.edu/~adkins/m7200/GroupHistory.pdf>>. Acesso em: 01/07/2023.
- [13] LEISHMAN, J. G. **A History of Helicopter Flight**. Universidade de Maryland, 2000. In: MAGNI, J. F., BENNANI, S., TERLOU, J (Eds.). **Robust Flight Control: A Design Challenge**. Garteur Action Group, Springer-Verlag, 1997.
- [14] PAPANTONOPOULOU, A. **Algebra: pure & applied**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2004.
- [15] SALES, G. L.; MAIA, M. C. **Física básica I**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.
- [16] SILVA, Monique Fernandes da. **Modelagem dinâmica, identificação de Parâmetros e Controle de um Veículo Aéreo Não tripulado do Tipo Quadricóptero**. 2015. Dissertação de Mestrado (Engenharia aeroespacial) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró.