UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS-UEA
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TEFÉ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARTILHA DE CÁLCULO COM TRIGONOMETRIA: UMA VISÃO PRÁTICA

Josimauro Borges de Carvalho

Tefé, 2023.

Josimauro Borges de Carvalho

CARTILHA DE CÁLCULO COM TRIGONOMETRIA: UMA VISÃO PRÁTICA

Tefé, 2023.

RESUMO

Não se trata de um livro, este texto foi escrito a partir das notas e rabiscos de seminários e apresentações realizados pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e de Física do Centro de Estudos Superiores de Tefé-CEST-UEA durante a execução do projeto de produtividade intitulado "Cálculo com Trigonometria: uma visão prática" que ocorreu entre os meses de maio de 2021 a abril de 2023 sob a coordenação do professor Josimauro Borges e a participação direta dos estudantes do CEST, a saber

Anderson da Silva Coelho
Carlos Henrique Morais Praia
Erijane Ribeiro de Oliveira
Hélio Peres da Silva Junior
Lais Cristina de Oliveira
Marcos Gomes Rodrigues
Milena Dias de Oliveira
Raifran Da Silva Maciel
Raimundo Cardoso da Silva
Sidney de Sousa Silva
Thamiles Brito Seixas
Varley Barbosa Gonçalves
Wildison Matos Meireles

O projeto teve carga horária total de 144 horas distribuídas em 6 horas por mês. O texto tem caráter elementar pelo fato de que, a princípio, os resultados terem sidos escritos para acadêmicos iniciantes do curso de Matemática. O objetivo é facilitar a compreensão de alguns temas abordados no curso de Cálculo ministrado para os acadêmicos do CEST.

SUMÁRIO

Seminário 09: equações e inequações trigonométricas.. 26

INTRODUÇÃO

O ensino de trigonometria é de importância incalculável na área da matemática básica e superior, dada sua infinita utilização nas mais diversas áreas de engenharia, arquitetura e astronomia, dentre outras. A sua abordagem junto ao Cálculo traz ao estudante uma visão diferenciada do assunto, visto que no ensino do Cálculo, em geral as funções trigonométricas não são mostradas de maneira aprofundada com aplicações diversas. Dado o fato de que existem poucas ou não há ações junto a professores da educação básica buscando melhorar o ensino no sentido de desmentir a ideia de dificuldade, e também do fato de a universidade (CEST) não dispor de um laboratório de matemática, onde se teria uma ênfase maior no ensino de trigonometria prática com os acadêmicos com o intuito de amenizar as supostas dificuldades de compreensão e de auxiliar na prática do ensino do Cálculo nas aulas ministradas aos acadêmicos dos curso de Matemática e Física do Centro de Estudos Superiores de Tefé, esse projeto se justifica como um instrumento inovador, de interação e cooperação entre a universidade e a comunidade escolar e, claro, fortificando o conhecimento e a aprendizagem dos acadêmicos envolvidos. Apesar de parte do conteúdo de Trigonometria fazer parte do currículo da Educação Básica observa-se que grande parte dos alunos chega à universidade com pouco conhecimento dos conceitos trigonométricos. Esta constatação compromete a aprendizagem dos acadêmicos visto que a Trigonometria aparece quase que integralmente no currículo dos cursos de matemática. Essa lacuna na bagagem do universitário tem promovido uma aprendizagem mecânica, sustentada na memorização, na aplicação de regras quase sempre desvinculadas de significado prático. O ensino do Cálculo na universidade também merece uma atenção especial, no tocante à exposição do conteúdo e consequentes resoluções de exercícios. Há alto índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo nos cursos das exatas no CEST. Assim, o projeto vem incentivar e auxiliar os estudantes, a fim de obterem melhor desempenho nessa matéria. Na certeza de melhorar a aprendizagem desses acadêmicos o projeto será altamente proveitoso. Além disso, os instrumentos confeccionados artesanalmente durante a realização do projeto estarão à disposição para serem utilizados pelos demais professores do CEST e de escolas públicas de Tefé

Seminário 01: USO DO TEODOLITO

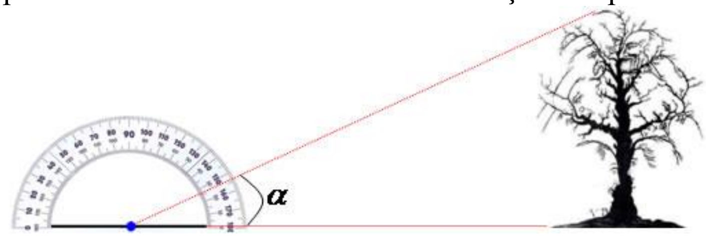
A finalidade principal de um teodolito é a medida de ângulos horizontais e verticais. Indiretamente, pode-se medir distâncias que, relacionadas com os ângulos verticais, possibilita obter tanto a distância horizontal entre dois pontos quanto a diferença de nível entre os mesmos. Você há de concordar que, em serviços de topografia, a precisão na coleta de dados é decisiva, não é mesmo? Nos últimos anos, felizmente, foram desenvolvidas várias tecnologias para apoiar essas atividades em campo. No entanto, o tradicional teodolito ainda possui campo de aplicação. É sobre esse instrumento óptico, tão antigo quanto importante, o tema do nosso tópico.

Como o teodolito funciona?

Usado há centenas de anos, o teodolito é um instrumento óptico capaz de realizar medidas de ângulos verticais e horizontais. Esse equipamento é formado por um sistema de eixos, círculos graduados, luneta de visada e níveis de bolha. Você sabia que, além da topografia, esse equipamento para medição de ângulos e distâncias é utilizado também na navegação e na meteorologia? Basicamente, trata-se de um telescópio com movimentos graduados na vertical e na horizontal. Assim, para olhar através do telescópio é preciso fixar o teodolito sobre um tripé centrado (norteado) e verticalizado. Com o avanço da tecnologia, o teodolito adquiriu maior portabilidade, passando a ser mais leve e fácil de carregar. Assim, o equipamento também adquiriu maior alcance e precisão, incluindo a possibilidade de ser acoplado a outros equipamentos de medição como o distanciômetro eletrônico ou trena eletrônica.

Como os teodolitos surgiram?

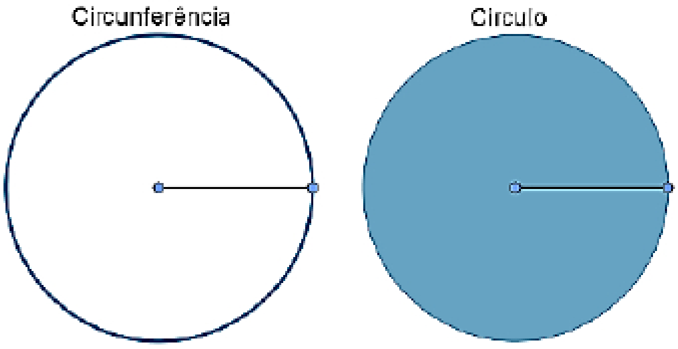
Antes de prosseguir, vou te contar um pouco de história. Você sabia que a construção do primeiro teodolito foi feita em 1720 por Jonathan Sisson com quatro parafusos niveladores? Nos anos 1830, o inventor Ignácio Porro criou um taquímetro autorredutor, um instrumento que possuía os mesmos elementos do teodolito, mas com um dispositivo ótico. No entanto, há registros muito mais antigos de uso de equipamentos para a medição de ângulos. Sabe-se que os egípcios, por exemplo, utilizavam a groma, uma espécie de teodolito muito útil na construção das pirâmides.



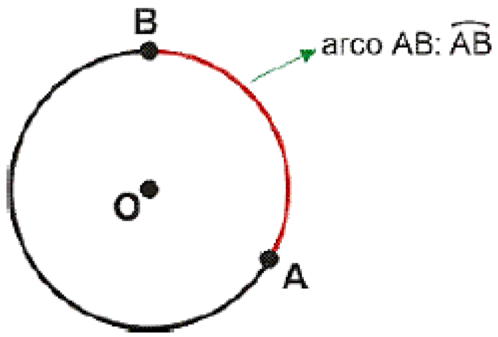
SEMINÁRIO 2: ARCOS E ÂNGULOS, MEDIDAS

Arcos e ângulos de uma circunferência

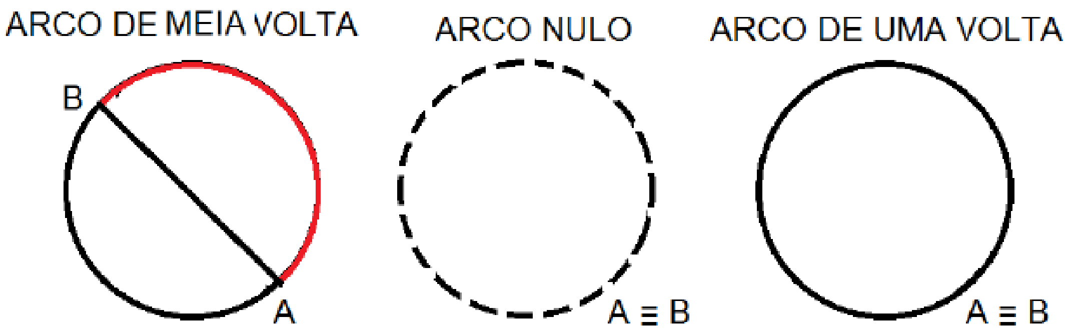
• CIRCUNFERÊNCIA e CÍRCULO



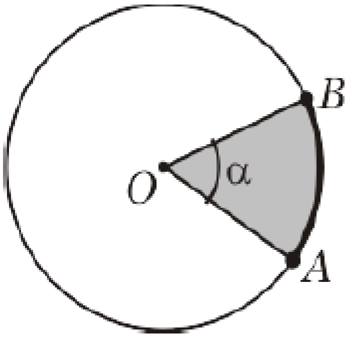
• ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA



TIPOS DE ARCOS

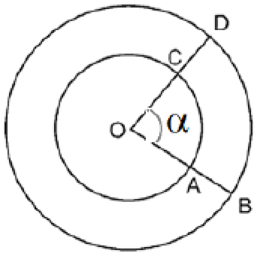


ÂNGULO CENTRAL



α é o ângulo central

Medida e comprimento de arco



- MEDIDA DE UM ARCO – é a medida angular.

  Exemplo: 60º

- COMPRIMENTO DE UM ARCO – é a medida linear.

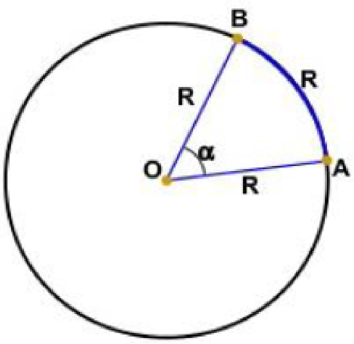
  Exemplo: 20 cm

A medida de um arco é igual à medida do ângulo central.

Unidades de medidas de arcos e ângulos

GRAU – é definido dividindo-se uma circunferência em 360 partes iguais entre si. Cada uma dessas partes, equivalentes a 1/360 da circunferência, corresponde a um arco de um grau e é representada por 1^0. O grau é a unidade derivada de um dos mais antigos sistemas de unidades de que se tem registro – o sistema sexagesimal, criado pelos babilônicos em torno de 4000 a.C.

RADIANO – é a unidade de medida de ângulo que corresponde ao ângulo central subtendido por um arco de circunferência cujo comprimento seja igual ao raio desta mesma circunferência.



Comprimento do arco $(\overset{\frown}{AB}) = R$

⬇

m(AB) = 1 radiano

⬇

α = m(AB) = 1 rad

Relação entre graus e radianos

Como sabemos, o comprimento C de uma circunferência de raio de medida r é: C = $2\pi r$ Isso significa que o raio "cabe" 2π vezes nesse comprimento. Assim, um arco de comprimento igual a r (1r) mede 1 rad; um arco de comprimento igual a 2r mede 2 rad, etc.; então um arco de comprimento igual a $2\pi r$ (volta completa) mede 2π rad. Conclui-se, então, que 2π rad e 360o são correspondentes.

RADIANOS	2π rad	π rad	$\pi/2$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/4$ rad
GRAUS	360°	180°	90°	60°	45°

Transformações de:

1º) GRAUS EM RADIANOS: utiliza-se uma regra de três simples e direta. Exemplo 1) Um arco mede 30o . Qual é a medida desse arco em radianos?

1) Um arco mede 30°. Qual é a medida desse arco em radianos?

Podemos estabelecer uma regra de três simples:

RADIANOS		GRAUS
π rad	________	180°
x	________	30°

Então, $X = \dfrac{30^\circ \cdot \pi \text{ rad}}{180^\circ} \Rightarrow X = \dfrac{\pi}{6}$ rad

Resp.: O arco mede $\pi/6$ rad.

2º) RADIANOS EM GRAUS: substitui-se o "π" por "180o" e efetua-se as operações que forem indicadas.

Exemplo

2) Em uma circunferência, um ângulo central mede $\pi/4$ radianos. Quanto mede esse ângulo em graus?

Podemos substituir o π por 180° e efetuarmos:

Então, $\pi/4$ rad = 180°/4 = 45°

Resp.: O arco mede 45° .

Comprimento de um arco

Quando medimos o comprimento de um arco, a unidade de medida é a mesma do raio: metro, centímetro, milímetro, etc. Sabendo que em uma volta completa a medida do arco é 2π radianos e o comprimento é $2\pi r$, portanto pode-se fazer a seguinte relação:

MEDIDA DO ARCO		COMPRIMENTO DO ARCO
2π	______	$2\pi r$
α	______	ℓ

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi r}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{\alpha . 2\pi . r}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\ell = \alpha . r}$$

Onde
- α : medida de um arco em radianos
- ℓ : comprimento de um arco
- r : medida do raio da circunferência

Exemplo

4) Quanto mede, em radianos, o arco AB, contido em uma circunferência de raio 3 cm e cujo comprimento é 4,5 cm?

Dados:
α = ?
r = 3 cm
ℓ = 4,5 cm

$$\Rightarrow \ell = \alpha . r \Rightarrow \alpha = \frac{4,5}{3} \Rightarrow \alpha = 1,5 \text{ rad}$$

Resp.: O arco mede 1,5 rad.

Exemplo

5) Qual é o comprimento de um arco de 72o sobre uma circunferência de raio 8 cm?

Dados:
α = 72°
r = 8 cm
ℓ = ?

(i) Expressar 72° em radianos:

180°	______	π rad
72°	______	α

$$\Rightarrow \alpha = \frac{72° . \pi}{180°} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

(ii) Calcular o comprimento do arco:

$$\ell = \alpha . r = \frac{2.\pi}{5} .8 = \frac{2 . 3,14 . 8}{5} = \frac{50,24}{5} = 10,048$$

Resp.: O comprimento do arco é de 10,048 cm.

SEMINÁRIO 03: O CICLO TRIGONOMÉTRICO; RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

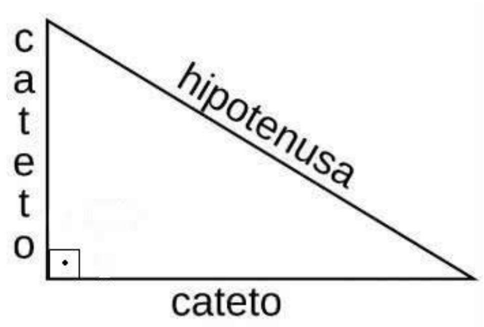
As razões trigonométricas são as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo. As principais são o seno, o cosseno e a tangente. Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa. Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa. A **trigonometria no triângulo retângulo** é o estudo sobre os triângulos que possuem um ângulo interno de 90°, chamado de ângulo reto. Lembre-se que a trigonometria é a ciência responsável pelas relações estabelecidas entre os triângulos. Eles são figuras geométricas planas compostas de três lados e três ângulos internos. O triângulo chamado equilátero possui os lados com medidas iguais. O isósceles possui dois lados com medidas iguais. Já o escaleno tem os três lados com medidas diferentes. No tocante aos ângulos dos triângulos, os ângulos internos maiores que 90° são chamados de obtusângulos. Já os ângulos internos menores que 90° são denominados de acutângulos. Além disso, a soma dos ângulos internos de um triângulo será sempre 180°.

Composição do Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é formado:

Catetos: são os lados do triângulo que formam o ângulo reto. São classificados em: cateto adjacente e cateto oposto.

Hipotenusa: é o lado oposto ao ângulo reto, sendo considerado o maior lado do triângulo retângulo



Segundo o <u>Teorema de Pitágoras</u>, a soma dos quadrado dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado de sua hipotenusa:

$\mathbf{h^2 = ca^2 + co^2}$

Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo

As razões trigonométricas são as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo. As principais são o seno, o cosseno e a tangente.

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

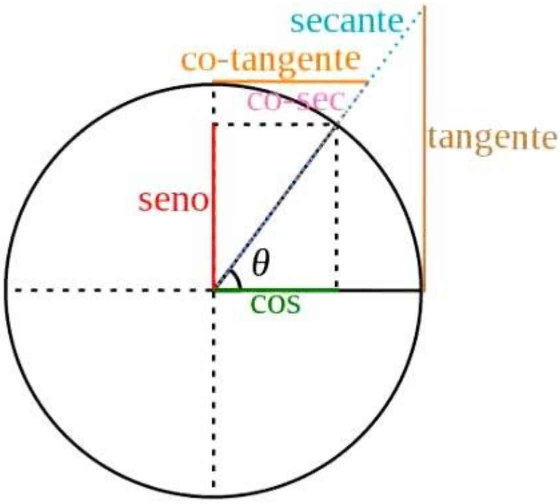
Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa.

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lê-se cateto oposto sobre o cateto adjacente.



O círculo trigonométrico é utilizado para auxiliar nas relações trigonométricas. Acima, podemos encontrar as principais razões, sendo que o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Além delas, temos as razões inversas: secante, cossecante e cotangente.

$$\text{Secante} = \frac{1}{\text{cosseno}}$$

Lê-se um sobre o cosseno.

$$\text{Cossecante} = \frac{1}{\text{seno}}$$

Lê-se um sobre o seno.

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{cosseno}}{\text{seno}}$$

Lê-se cosseno sobre o seno.

O círculo trigonométrico é utilizado para auxiliar nas relações trigonométricas. Acima, podemos encontrar as principais razões, sendo que o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Além delas, temos as razões inversas: secante, cossecante e cotangente.

$$\text{Secante} = \frac{1}{\text{cosseno}}$$

Lê-se um sobre o cosseno.

$$\text{Cossecante} = \frac{1}{\text{seno}}$$

Lê-se um sobre o seno.

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{cosseno}}{\text{seno}}$$

Lê-se cosseno sobre o seno.

Relações Trigonométricas	30°	45°	60°
Seno	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno	√3/2	√2/2	1/2
Tangente	√3/3	1	√3

Exercício Resolvido

Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 8 cm e um dos ângulos internos possui 30°. Qual o valor dos catetos oposto (x) e adjacente (y) desse triângulo?

De acordo com as relações trigonométricas, o seno é representado pela seguinte relação:

Sen = cateto oposto/hipotenusa

$$\text{Sen } 30° = x/8$$
$$½ = x/8$$
$$2x = 8$$
$$x = 8/2$$
$$x = 4$$

Logo, o **cateto oposto** desse triângulo retângulo mede **4 cm**.

A partir disso, se o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados de seus catetos, temos:

Hipotenusa^2 = Cateto oposto^2 + Cateto adjacente^2

$$8^2 = 4^2+y^2$$
$$8^2 - 4^2 = y^2$$
$$64 - 16 = y^2$$
$$y^2 = 48$$
$$y = \sqrt{48}$$

Logo, o **cateto adjacente** desse triângulo retângulo mede **√48 cm**.

Assim, podemos concluir que os lados desse triângulo medem 8 cm, 4 cm e √48 cm. Já seus ângulos internos são de 30° (acutângulo), 90° (reto) e 60° (acutângulo), visto que a soma dos ângulos internos dos triângulos sempre será 180°.

SEMINÁRIO 4: O TEOREMA DE PITÁGORAS: APLICAÇÕES NO COTIDIANO.

Até hoje, o Teorema é muito utilizado em áreas como arquitetura, construção civil, urbanização e física, além da própria matemática. "O Teorema de Pitágoras é um dos aprendizados mais simples e importantes da geometria. E a geometria está em todo lugar, seja na engenharia ou na biologia, é uma das primeiras coisas que você precisa saber em qualquer tipo de ciência. A fórmula é muito usada na construção, por exemplo, para calcular a quantidade certa de material, ou no caso de um avião pousando, para saber a distância até a pista de pouso", explica o pesquisador do IMPA Vinicius Ramos, da área de geometria simplética. A fórmula costuma ser ensinada para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, e seu estudo não é relevante apenas por sua aplicação prática. "O ensino da matemática não deve ser focado apenas nos conceitos que você vai usar no dia a dia. Por exemplo, você precisa aprender a calcular juros compostos porque você vai pegar um empréstimo ou aplicar dinheiro no banco, o que é muito importante. Mas a matemática na escola precisa ser muito mais do que isso, precisa ser também uma forma de aprender a pensar e entender o mundo", comenta o matemático.

Pitágoras é um dos matemáticos mais conhecidos da história, além de filósofo, astrônomo e músico. Nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 560 a.C., e morreu no sul da Itália, cerca de 480 a.C.. Passou boa parte de sua vida na antiga região da Magna Grécia, atual território italiano, onde fundou sua escola filosófica. O alicerce da filosofia pitagórica era a ideia de que tudo é número, inspirado na descoberta de que as harmonias musicais podem ser expressas através dos números. Outro fundamento de sua crença estava na astronomia, que Pitágoras aprendera com os babilônios. O matemático grego acreditava que os movimentos periódicos dos planetas estariam relacionados de alguma forma com os intervalos musicais, a "música das estrelas". Mas sua contribuição científica mais conhecida é o teorema homônimo.

Até hoje, não se sabe se a fórmula que diz que o quadrado do lado maior de um triângulo de 90 graus é sempre igual à soma dos quadrados dos outros dois lados foi realmente descoberta por Pitágoras. Vestígios arqueológicos comprovam que o teorema já era conhecido dos babilônios cerca de 1800 a.C.. Mas a importância do filósofo ao apresentar o teorema para o mundo grego e para a civilização ocidental é amplamente reconhecida por estudiosos e historiadores.

O Teorema de Pitágoras no Cotidiano

O Teorema de Pitágoras possui inúmeras aplicações nas diversas áreas de atuação do homem. A área de transportes é considerada muito importante para o desenvolvimento de um país, o teorema de Pitágoras está presente nela contribuindo na sua logística e no desenvolvimento cotidiano, no intuito de dinamizar cada vez mais o setor.

Imagine a seguinte situação:

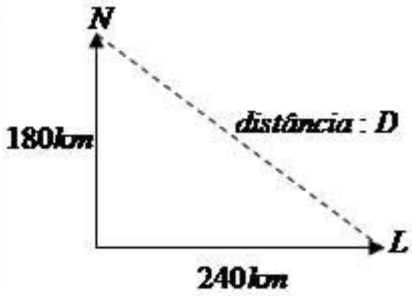
Dois navios A e B partem em sentidos diferentes: o primeiro para o norte e o segundo para o leste, o navio A com velocidade constante de 30 Km/h e o navio B com velocidade constante de 40 Km/h. Qual será a distância entre eles após 6 horas?

Distância percorrida pelo navio A após 6 horas:
D = 30*6 = 180 Km
Distância percorrida pelo navio B após 6 horas:
D = 40 * 6 = 240 Km

Veja o esquema:

Aplicando o Teorema de Pitágoras

$$d^2 = 180^2 + 240^2$$
$$d^2 = 32400 + 57600$$
$$d^2 = 90000$$
$$\sqrt{d^2} = \sqrt{90000}$$
$$d = 300km$$



SEMINÁRIO 5: ESTUDO DAS FUNÇÕES CIRCULARES E HIPERBÓLICAS

Análogas de muitas formas às funções trigonométricas; Relacionam-se com as hipérboles, ao passo que as funções trigonométricas relacionam-se com o círculo.

Funções Hiperbólicas Básicas

Cosseno Hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Seno Hiperbólico: $\text{senh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Tangente Hiperbólico: $\text{tgh } x = \dfrac{\text{senh } x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Cotangente Hiperbólico: $\text{cotgh } x = \dfrac{\cosh x}{\text{senh } x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

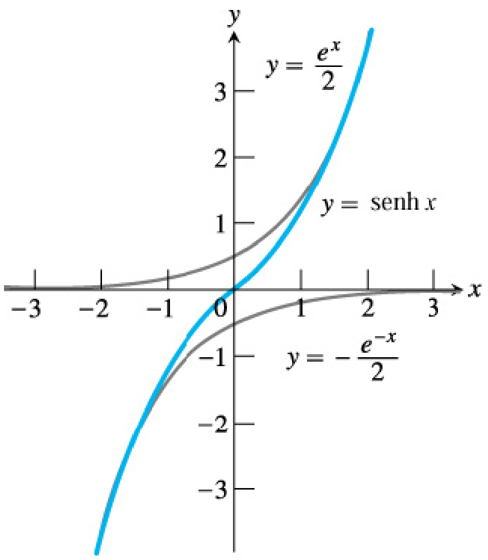
Secante Hiperbólica: $\text{sech } x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

Cossecante Hiperbólica: $\text{cossech } x = \dfrac{1}{\text{senh } x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

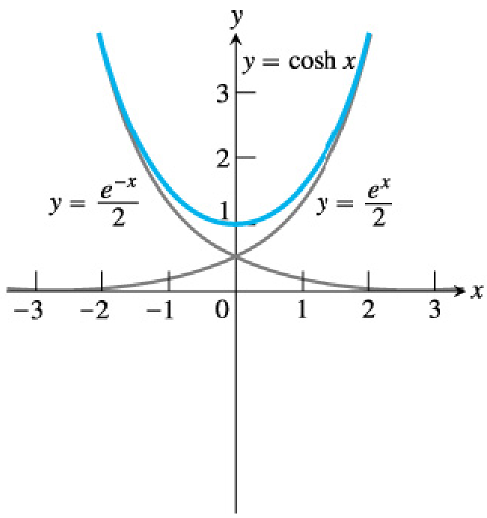
Identidades

$$
\begin{aligned}
\operatorname{senh}(-x) &= -\operatorname{senh} x\\
\cosh(-x) &= \cosh(x)\\
\operatorname{senh} 2x &= 2\operatorname{senh} x \cosh x\\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x\\
\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y\\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x\\
\cosh^2 x &= \frac{\cosh 2x + 1}{2}\\
\operatorname{senh}^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2}\\
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= 1\\
\operatorname{tgh}^2 x &= 1 - \operatorname{sech}^2 x\\
\operatorname{cotgh}^2 x &= 1 + \operatorname{cossech}^2 x
\end{aligned}
$$

Gráfico de Funções Hiperbólicas Funções Seno e Cosseno Hiperbólicos

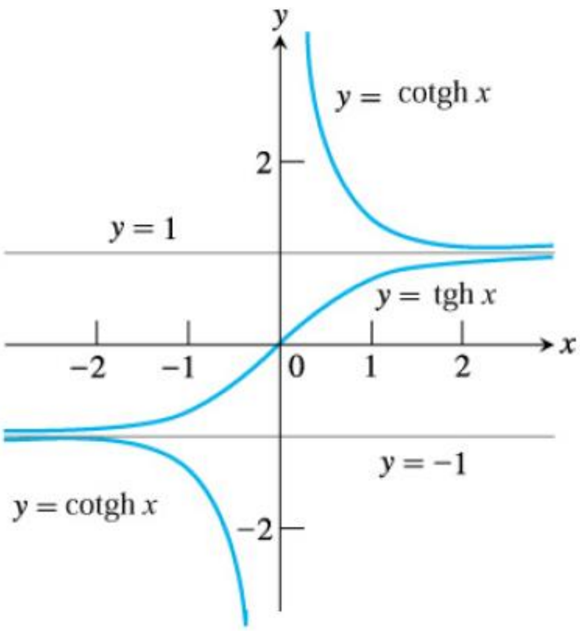


(a) O seno hiperbólico e suas componentes exponenciais



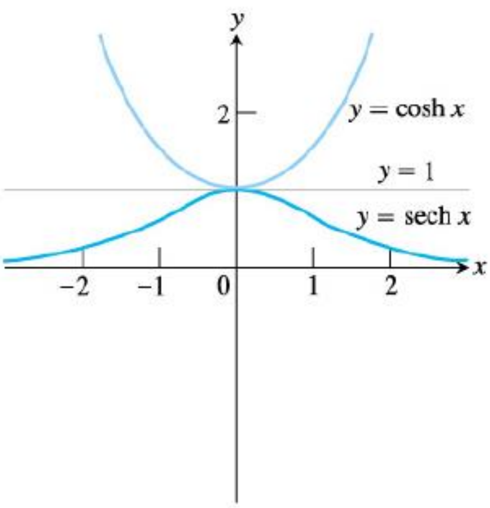
(b) O cosseno hiperbólico e suas componentes exponenciais

Funções Tangente e Cotangente Hiperbólicos

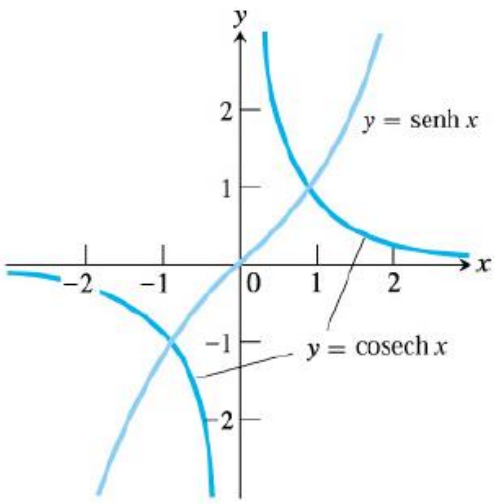


(c) Os gráficos de $y = \text{tgh } x$ e
$y = \text{cotgh } x = 1/\text{tgh } x$

Funções Secante e Cossecante Hiperbólicos



(d) Os gráficos de $y = \cosh x$ e
$y = \text{sech } x = 1/\cosh x$



(e) Os gráficos de $y = \text{senh } x$ e
$y = \text{cosech } x = 1/\text{senh } x$

Derivada de Funções Hiperbólicas Função Seno e Cosseno Hiperbólico

- **Função Seno:**

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

- **Função Cosseno:**

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) &= \cosh x \\
\frac{d}{dx}(\cosh x) &= \operatorname{senh} x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) &= \operatorname{sech}^2 x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} x) &= -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) &= -\operatorname{cossech}^2 x
\end{aligned}$$

Tabelas de Derivadas!

Sabendo que:

- Cosseno Hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Seno Hiperbólico: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Tabela de Derivadas — Regra da Cadeia !

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u(x)) &= \cosh u(x)\frac{d}{dx}(u(x)) \\
\frac{d}{dx}(\cosh u(x)) &= \operatorname{senh} u(x)\frac{d}{dx}(u(x)) \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} u(x)) &= \operatorname{sech}^2 u(x)\frac{d}{dx}(u(x)) \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} u(x)) &= -\operatorname{cossech} u(x)\ \operatorname{cotgh} u(x)\frac{d}{dx}(u(x)) \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u(x)) &= -\operatorname{sech} u(x)\ \operatorname{tgh} u(x)\frac{d}{dx}(u(x)) \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} u(x)) &= -\operatorname{cossech}^2 u(x)\frac{d}{dx}(u(x))
\end{aligned}
$$

Funções Hiperbólicas Inversas

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{arc\,senh} x &\iff&& \operatorname{senh} y &= x \\
y &= \operatorname{arc\,cosh} x &\iff&& \cosh y &= x \\
y &= \operatorname{arc\,tgh} x &\iff&& \operatorname{tgh} y &= x \\
y &= \operatorname{arc\,cossech} x &\iff&& \operatorname{cossech} y &= x \\
y &= \operatorname{arc\,sech} x &\iff&& \operatorname{sech} y &= x \\
y &= \operatorname{arc\,cotgh} x &\iff&& \operatorname{cotgh} y &= x
\end{aligned}
$$

Tabela de Integrais das Funções Hiperbólicas

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{senh} u\,du &= \cosh u + C \\
\int \cosh u\,du &= \operatorname{senh} u + C \\
\int \operatorname{sech}^2 u\,du &= \operatorname{tgh} u + C \\
\int \operatorname{cossech}^2 u\,du &= -\operatorname{cotgh} u + C \\
\int \operatorname{sech} u\ \operatorname{tgh} u\,du &= -\operatorname{sech} u + C \\
\int \operatorname{cossech} u\ \operatorname{cotgh} u\,du &= -\operatorname{cossech} u + C
\end{aligned}
$$

Tabela

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \text{arc senh}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \text{arc cosh}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\,\text{arc tgh}\,\frac{u}{a} + C, & \text{se } u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\,\text{arc cotgh}\,\frac{u}{a} + C, & \text{se } u^2 > a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\,\text{arc sech}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$$

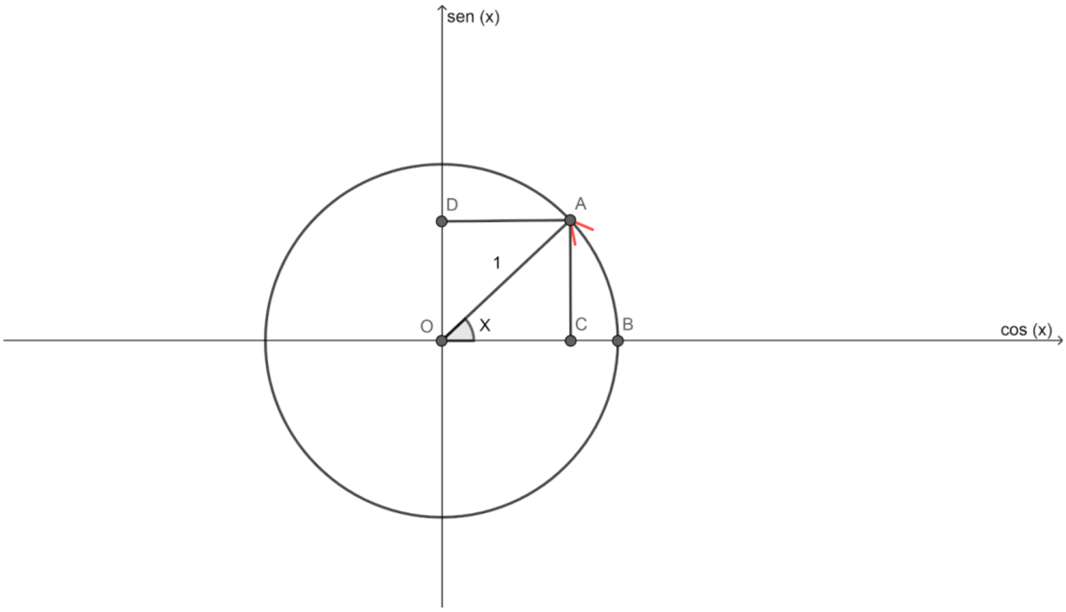
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\,\text{arc cossech}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad a \neq 0$$

SEMINÁROIO 6: RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA.

A fórmula fundamental da trigonometria diz-se que não importa qual seja o valor θ, $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ é sempre igual a 1. Podemos provar essa identidade usando o teorema de Pitágoras no círculo trigonométrico com $x^2+y^2=1$. A relação fundamental da trigonometria, também chamada de RFT, relaciona duas funções trigonométricas bastante conhecidas, a função seno e a função cosseno. Essa relação é útil em diversos problemas de álgebra que envolva qualquer uma das funções trigonométricas, seja ela a seno, cosseno ou tangente. Existem duas relações fundamentais da Trigonometria, por meio das quais é possível encontrar relações entre razões trigonométricas. Elas são chamadas fundamentais porque estão envolvidas na grande maioria dos cálculos básicos da Trigonometria em um nível intermediário. A primeira dessas razões, que é muito parecida com o teorema de Pitágoras, é a seguinte:

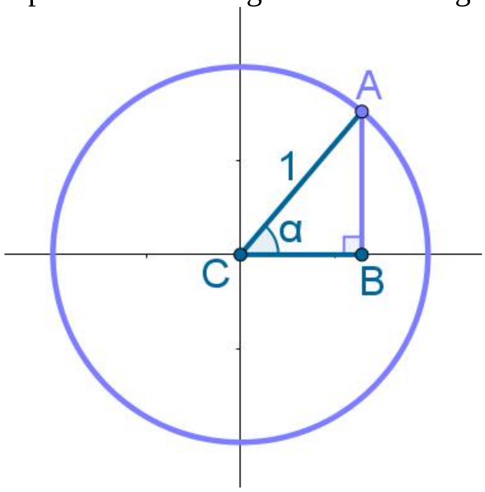
$$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$$

Podemos dizer, portanto, que a soma do quadrado do seno de um arco com o quadrado do cosseno desse mesmo arco sempre será igual a 1. A demonstração desse teorema, mais conhecida como primeira relação fundamental da Trigonometria, depende de conhecimentos básicos sobre o ciclo trigonométrico, que serão relembrados a seguir. Sendo x o ângulo em questão. Perceba que esse ângulo x deve ser o mesmo tanto na parcela do seno quanto na parcela do cosseno. A demonstração da Relação Fundamental da Trigonometria é fácil, utilizando apenas o ciclo trigonométrico e o Teorema de Pitágoras.



Demonstração da primeira relação fundamental

Grande parte da demonstração da primeira relação fundamental é dada com a explicação sobre o ciclo trigonométrico acima. Na imagem a seguir, observe que o cateto oposto ao ângulo α é o segmento AB e que seu cateto adjacente é o segmento CB. Além disso, note também que a hipotenusa do triângulo ABC é o segmento CA, que mede 1 un.



Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, teremos:

$$AB^2 + CB^2 = AC^2$$

$$\text{sen}\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1^2$$

Sabendo que $\text{sen}\alpha^2 = \text{sen}^2\alpha$, podemos escrever:

$$\text{sen}\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1^2$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

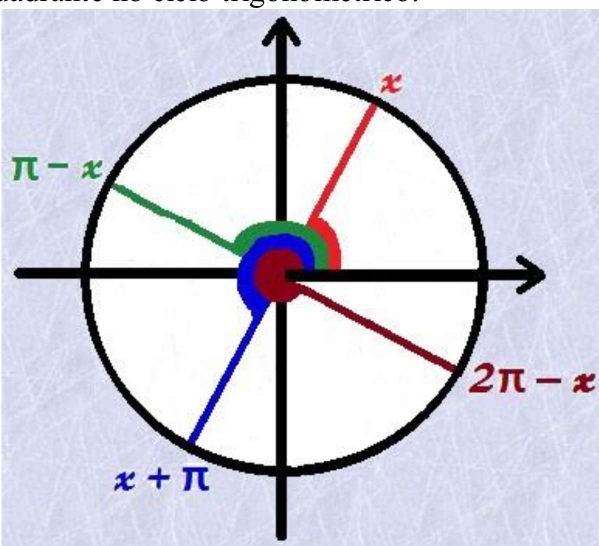
Essa é justamente a primeira relação fundamental da Trigonometria.

SEMINÁRIO 07: REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE; ARCOS NOTÁVEIS

A redução ao primeiro quadrante permite trabalhar as funções trigonométricas em ângulos localizados em todo o ciclo trigonométrico. Quando estamos trabalhando com Trigonometria e deparamo-nos com um ângulo que não se encontra no primeiro quadrante, sempre podemos reduzi-lo de forma a encontrar o ângulo correspondente a esse que esteja justamente no 1° quadrante. Isso é possível graças à simetria presente no ciclo trigonométrico. Mas precisamos nos atentar para o que ocorre com os sinais das funções trigonométricas em cada quadrante. Vejamos a seguir algumas formas de trabalhar a mudança de quadrante no ciclo trigonométrico.

Redução ao Primeiro Quadrante

Na figura a seguir, considere o ângulo x, destacado em vermelho no primeiro quadrante. Nós podemos encontrar os ângulos que são correspondentes a x nos demais quadrantes. A distância desses ângulos a x é sempre um valor múltiplo de 90°, de modo que o módulo das funções trigonométricas desses ângulos não se altera. Veja mais sobre "Redução ao primeiro quadrante no ciclo trigonométrico.



Se o ângulo com o qual estamos trabalhando for y e ele estiver no segundo quadrante, seu correspondente no 1° quadrante será o ângulo x tal que

$$\pi - x = y \text{ ou } 180° - x = y.$$

Exemplo 1:

Considere o ângulo 150°. Para reduzi-lo ao 1° quadrante, teremos o seguinte:

$$180° - x = 150°$$
$$x = 30°$$

Analogamente, se o ângulo y pertencer ao terceiro quadrante, seu correspondente x no primeiro quadrante será dado por $x + \pi = y$ ou $180° + x = y$."
Exemplo 2:
Considere o ângulo $4\pi/3$, seu correspondente será:

$$x + \pi = 4\pi/3$$

$$x = 4\pi/3 - \pi$$

$$x = \pi/3.$$

Por fim, se o ângulo analisado y pertencer ao quarto quadrante, o ângulo x correspondente a ele no primeiro quadrante será dado por

$$2\pi - x = y \text{ ou } 360° - x = y.$$

SEMINÁRIO 08: SOMA, DIFERENÇA, PRODUTO E ARCO METADE

Fórmulas do arco metade

As fórmulas do arco metade foram determinadas a partir das fórmulas do arco duplo e da relação trigonométrica fundamental. No estudo da trigonometria, as fórmulas da soma de arcos e as fórmulas do arco duplo são fundamentais para o cálculo do seno, cosseno e tangente dos arcos e para a simplificação de expressões trigonométricas. Há também, nesse mesmo contexto, as fórmulas do arco metade. Para determinar as fórmulas do arco metade partiremos das fórmulas do arco duplo e da relação trigonométrica fundamental.

Sabemos que $\cos 2a = cos^2 a - sen^2 a$ e $sen^2 a + cos^2 a = 1$. Daí, temos que:

$$sen^2 a = 1 - cos^2 a$$

Substituindo na fórmula do arco duplo, obtemos:

$$\cos 2a = 2cos^2 a - 1$$

Fazendo 2a = x e substituindo na igualdade acima, teremos:

$$\cos x = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$$

$$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

De forma análoga, determinamos o seno do arco metade.

Sabemos que:

$$cos^2 a = 1 - sen^2 a$$

Substituindo na fórmula:

$$\cos 2a = cos^2 a - sen^2 a$$

Obtemos:

$$\cos 2a = 1 - 2sen^2 a$$

Fazendo 2a = x, teremos:

$$\cos x = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x - 1$$

$$2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Para chegarmos à fórmula da tangente do arco metade, basta dividir a expressão do seno pela do cosseno.

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Observação: Veja que nas fórmulas do arco metade o valor poderá ser negativo ou positivo. Isso irá depender do quadrante onde está localizado o arco x/2.

Exemplo 1. Sabendo que $cos\ x = \frac{1}{2}$ e que x é um arco do primeiro quadrante, determine os valores de $sen\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solução: Temos que:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1/2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3/2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo 2. Determine o valor de tg 15°.

Solução: Podemos escrever 15° como 30°/2. Assim, teremos:

$$tg\ 15^o = tg\left(\frac{30^o}{2}\right)$$

Sabemos que $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo,

$$tg\ 15^o = tg\left(\frac{30^o}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{1+\cos 30^o}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

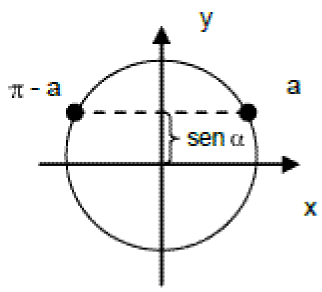
SEMINÁRIO 09: EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O que difere a equação e inequação trigonométrica das outras é que elas possuem funções trigonométricas das incógnitas. Função trigonométrica é a relação feita entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Essas relações recebem o nome de seno, co-seno, tangente, co-secante, secante, co-tangente. Veja alguns exemplos de quando uma equação é trigonométrica e quando ela não é trigonométrica. sen x + cos y = 3 é uma equação trigonométrica, pois as incógnitas x e y possuem funções trigonométricas. x +

tg30º - y2 + cos60º = √3 não é uma equação trigonométrica, pois as funções trigonométricas não pertencem às incógnitas, ou seja, as incógnitas independem das funções trigonométricas. Veja agora exemplos de inequações trigonométricas e quando uma inequação não é trigonométrica por que possui funções trigonométricas. sen x > √3 é uma inequação trigonométrica pois função trigonométrica é função de uma incógnita.

(sen 30°) . x + 1 > 2 não é uma função trigonométrica, pois função trigonométrica não é uma função da incógnita.

sen x = sen a



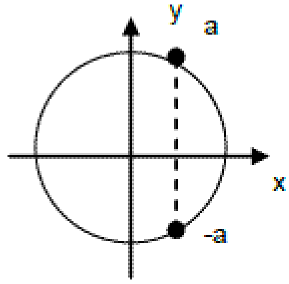
$$\text{sen } x = \text{sen } a \qquad \begin{matrix} x = a + 2k\pi \\ x = (\pi - a) + 2k\pi,\ k \in Z \end{matrix}$$

Ex.: Resolva a equação sen x = $\frac{1}{2}$.

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{6}$$

$$S = x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$$

cos x = cos a

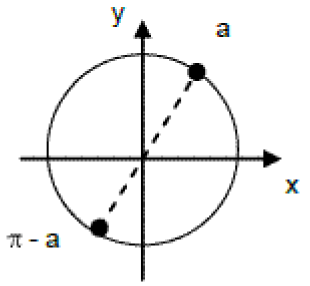


$$\cos x = \cos a \qquad \begin{matrix} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi,\ k \in Z \end{matrix}$$

Ex.: Resolva a equação cos x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, U = [0, 2π]

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow S = \{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$$

$\boxed{tg\ x = tg\ a}$



cos x = cos a $\quad x = a + 2k\pi$

$x = (a + \pi) + 2k\pi,\ k \in Z$

Solução única: $x = a + k\pi,\ k \in Z$

Ex.: Resolva a equação $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$, $U = [0, \pi]$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12} > \pi$ (não convém) $\quad S = \{\frac{7\pi}{12}\}$

2º tipo: Artifícios podem ser utilizados para fazer com que as equações recaiam em um dos tipos anterior-mente estudados.

Exemplo: Resolva a equação $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

Solução: Fazendo cos x = y, temos $2y^2 - 3y + 1 = 0$ e resolvendo achamos $y = 1$ e $y = \frac{1}{2}$.

Então temos que:

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in Z$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$

I) Mudança de variável:

Exemplo: Resolva a equação

$\cos^2 x + 2\,sen^2 x = \frac{7}{4}$ em $U = [0, 2\pi]$

Solução: $(1 - sen^2 x) + 2\,sen^2 x = \frac{7}{4} \Rightarrow 1 + sen^2 x = \frac{7}{4} \Rightarrow sen^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow sen\,x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

II) Utilização das relações trigonométricas:

Exemplo: Resolver a equação $sen\,x - sen^3 x = 0$

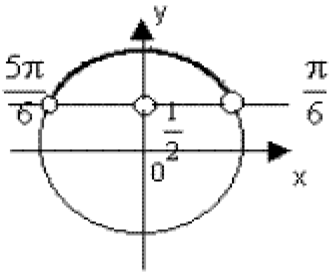
Solução: $sen\,x\,(1 - sen^2 x) = 0 \Rightarrow sen\,x \cdot \cos^2 x = 0$

$sen\,x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

Inequações Trigonométricas

Exemplo 1: Resolva a inequação sen x > ½.



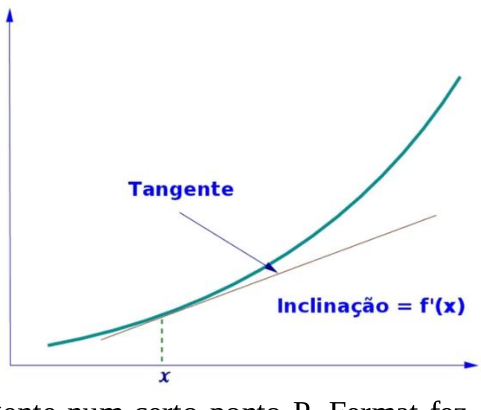
$$S = \left\{ x \in R \, / \, \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \, k \in Z \right\}$$

Exemplo: tan α + cot α = 2 com 0 ≤ α ≤ 2π - tenta-se reduzir todos os termos a seno e cosseno:

SEMINÁRIO 10: A DERIVADA E A INTEGRAL

Do ponto de vista geométrico, a derivada está ligada ao problema de traçar a tangente a uma curva enquanto que a integral está relacionada com o problema de determinar a área de certas figuras planas, mas também possui muitas outras interpretações possíveis. O Cálculo Diferencial e Integral surgiu através da Geometria e da Álgebra, e por ele podemos estudar taxas de variações de grandeza. O Cálculo Diferencial e Integral, também conhecido como Cálculo Infinitesimal, ou apenas de Cálculo, surgiu através da Geometria e da Álgebra, e por ele podemos estudar taxas de variações de grandeza, como, por exemplo, a inclinação de uma reta, ou acumulação de quantidade, sendo volume de sólidos um exemplo desta última. Este tópico importante da matemática (tópico este que dá muita dor de cabeça para o povo das exatas) é dividido, basicamente, em 3 partes: limites, derivadas e integrais. Neste texto, falaremos sobre estas duas últimas.

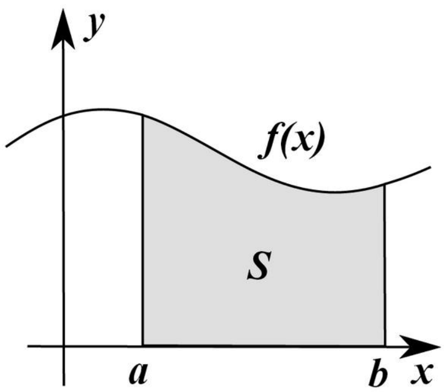
O que é Derivada?



Para determinar uma tangente num certo ponto P, Fermat fez o seguinte: ele imaginou outro ponto Q localizado em uma curva, formando a reta PQ e fazendo-a secante em relação a esta curva. Fazendo o ponto Q “deslizar” até o ponto P, sobre tal curva, ele

obteve uma reta PQ aproximada de outra reta *t*, reta esta que Fermat chamou de tangente em relação a curva no ponto P. Foi observado por Fermat que, em certas funções, nos pontos onde a curva detinha valores extremos, a tangente ao gráfico deveria se caracterizar como sendo uma reta do tipo horizontal, uma vez que comparada ao valor assumido por tal função num dos pontos P(x, f(x)) com o valor do outro ponto Q(x+E, f(x+E)) próximo de P, a diferença entre f(x+E) e f(x) era mínima, praticamente nula,quando comparada com o valor de E, diferença entre abscissas de Q e P. Deste modo, ele relacionou a determinação de tangentes à curvas e de extremos.
Assim nascia o conceito da derivada. Dentre muitos tópicos deste assunto (que é muito extenso, contendo a Regra da Cadeia, a Regra de L'Hopital, entre outros), falarei de como se resolve uma derivada básica: Imagine uma função x elevada ao quadrado (x^2). A derivada desta função, que leremos como f '(x) (função x linha), será 2x,. Por quê? Vocês concordam que $f(x) = x^2$ pode ser lido como $f(x) = 1.x^2$ (função de uma vez x^2)? Então, para definir da derivada desta função, subtraímos 1 do expoente (no caso, o número 2) e multiplicaremos o número do expoente original pelo número que esta multiplicando x, ficando, no exemplo dado: $f'(x) = 2.1.x^{2+1}$, que é f''(x) = 2x. Dando um outro exemplo: a derivada de $f(y) = 3y^5$ é $f'(y) = 15y^4$.

O que é integral?



Então, agora vamos a outro tópico: Na matemática, tudo tem seu inverso. Apenas para dar alguns exemplos: o inverso do seno é cossecante *(cossec)*, o inverso de tangente é cotangente, o inverso de adição é subtração e o inverso de multiplicação é divisão. A derivada também tem sua inversa, que é chamada de antiderivada ou integral. A integral pode ser definida ou indefinida, e dentro disto também temos inúmeros tópicos (sendo necessários o cálculo II, III, IV, E.D.O., dentro de outras várias matérias, só para explicar isto). A integral é representada por $\int$. Vou falar aqui apenas da integral indefinida. Imagine $f'(x) = 2x$. A integral desta função é representada por $g(x) = \int 2x\, dx$. Para definir esta integral, somaremos 1 ao expoente da função e dividiremos tal função pelo resultado desta soma. Explicando na prática: $g(x) = \int 2x\, dx = \;=\; = x^2$. Outro exemplo de integral é $g(x) = \int 2x + 5\, dx = x^2 + 5$. Nos dois exemplos dados acima, observamos que tanto x^2 quanto $x^2 + 5$ são integrais indefinidas para 2x. Estas funções são denominadas de integrais primitivas, e a diferença entre elas é sempre uma constante. Ou seja: a integral indefinida de $2x$ é $x^2 + C$, onde C é uma constante real.

SEMINÁRIO 11: REGRAS DE DERIVAÇÃO

O **cálculo de derivadas** pode ser feito de duas formas: utilizando a definição de derivada, que envolve um limite que tende a uma indefinição, ou utilizando regras de derivação, cujo funcionamento é garantido pela análise matemática. Em primeiro lugar, as derivadas, quando existem, determinam a inclinação da reta tangente a uma função $f(x)$. Essa inclinação também é conhecida como taxa de variação e é utilizada para resolver os mais variados tipos de problemas matemáticos. Para determinar essa inclinação, deve-se calcular o limite abaixo. Dessa maneira, $f'(x)$ é a derivada da função $f(x)$ e diz-se que $f(x)$ é derivável no ponto p.

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}}$$

As notações mais utilizadas para a derivada da função $f(x)$ são: $f'(x)$ ou $[f(x)]'$. Se essas derivadas forem calculadas no ponto p, as notações passarão a ser: $f'(p)$ ou $[f(p)]'$. Calcular esse limite não é grande desafio para funções polinomiais com grau 2 ou 3, uma vez que as propriedades de limites garantem que *o limite das somas é igual à soma dos limites* e, dessa forma, diante do limite de um polinômio, basta calcular os limites de cada monômio que o formou. Contudo, funções polinomiais de grau muito alto ou outros tipos de funções imprimem um alto grau de dificuldade para o cálculo desse limite. Dessa forma, buscando maior agilidade e facilidade para os cálculos de derivadas, é possível provar os resultados subsequentes, usualmente conhecidos como *propriedades das derivadas*, ou *regras de derivação*.

Regras de derivação

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis e seja a um número real qualquer. Então, valem as propriedades:

i) Se $f(x) = a$, *então* $f'(x) = 0$.

ii) Se $f(x) = ax$, *então* $f'(x) = a$.

iii) (Regra do tombo) Se $f(x) = x^a$, *então* $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

iv) (Derivada da soma) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

v) $[af(x)]' = a \cdot f'(x)$.

vi) (Regra do produto) $[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

vii) (regra do quociente):

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exemplos:

Exemplo 1: Calcule a derivada de $f(x) = x^3$

Pela regra do tombo:

$$\boldsymbol{f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2}$$

Exemplo 2: Calcule a derivada de $f(x) = 3x^4$

Pela regra do tombo:

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^{4-1}$$
$$f'(x) = 12x^3$$

Exemplo 3: Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Pela regra do tombo:

$$f(x) = x^{1/2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemplo 4: Calcule a derivada de $f(x) = x^2 \cdot (3x - 1)$

Pode-se resolver esse problema pela simplificação do polinômio ou por meio da regra do produto:

$$f'(x) = 2x(3x - 1) + x^2(3 - 0)$$
$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3x^2$$
$$f'(x) = 9x^2 - 2x$$

Exemplo 5: Calcule a derivada da função:

$$d(x) = \frac{4x^3 + 1}{5x^2}$$

No caso da função $d(x)$, temos as funções $f(x) = 4x^3 + 1$ e $g(x) = 5x^2$. Portanto, utilizando a regra do quociente, teremos:

$$d'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{[4x^3 + 1]'\, 5x^2 - (4x^3 + 1)\,[5x^2]'}{(5x^2)^2}$$

Logo, pela regra do quociente, a derivada da função $d(x)$ é dada por:

$$d'(x) = \frac{12x^2 \cdot 5x^2 - (4x^3 + 1) \cdot 10x}{(5x^2)^2}$$

SEMINÁRIO 12: TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Nem todas as integrais são imediatas segundo o formulário dado, porém alguns métodos simples ajudam a obter as primitivas das funções que não têm integração imediata.

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

O processo consiste em substituir a variável da função integranda por outra tal que se recaia com algum artifício e facilidade numa das integrais imediatas. Não há uma regra fixa para isso. É necessário que se faça bastante exercícios até saber optar pela melhor substituição.

Seja a expressão $\int g\left[f(x)\right]\cdot f'(x)\,dx$.

Através da substituição $u = f(x)$ por $u' = f'(x)$ ou $\frac{du}{dx} = f'(x)$ ou ainda, $du = f'(x)\,dx$, vem:

$$\int g\underbrace{\left[f(x)\right]}_{u}\cdot \underbrace{f'(x)\,dx}_{du} = \int g(u)\,du = h(u) + C = h\left[f(x)\right] + C,$$

admitindo que se conhece $\int g(u)\,du$.

O método da substituição de variável exige a identificação de u e u' ou u e du na integral dada.

QUESTÕES RESOLVIDAS

Questão 01 Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int (x+1)^3\,dx$

Resolução

Fazendo $x+1=u$ *ou* $u=x+1$, *temos:*

$du = 1dx \Rightarrow du = dx \Rightarrow dx = du$

$$\int (x+1)^3\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x+1)^4}{4} + C$$

b) $\int \frac{1}{n+x}\,dx$

Resolução

Fazendo $n+x=u$ ou $u=n+x$, *temos:*

$du = 1dx \Rightarrow du = dx \Rightarrow dx = du$

$$\int \frac{1}{n+x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|n+x| + C$$

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^4}$$

Resolução

Fazendo $3x-1=u$ ou $u=3x-1$, *temos*:

$$du = 3\,dx \Rightarrow 3\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$$

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^4} = \int \frac{1}{(3x-1)^4}dx = \int \frac{1}{u^4}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^4}du = \frac{1}{3}\int u^{-4}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-3}}{-3}+C =$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot u^{-3}+C = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{u^3}+C = -\frac{1}{9u^3}+C = -\frac{1}{9(3x-1)^3}+C$$

$$\int \cos(1+x)\,dx$$

Resolução

Fazendo $1+x=u$ ou $u=1+x$, *temos*:

$$du = 1\,dx \Rightarrow du = dx \Rightarrow dx = du$$

$$\int \cos(1+x)\,dx = \int \cos u\,du = sen\,u + c = sen\,(1+x)+C$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\cdot 2x\,dx$$

Resolução

Fazendo $x^2-1=u$ *ou* $u=x^2-1$, *temos*:

$$du = 2x\,dx \Rightarrow 2x\,dx = du$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\cdot 2x\,dx = \int \sqrt{u}\cdot du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int e^{tg\,x}\cdot \sec^2 x\,dx$$

Resolução

Fazendo $tg\ x = u$ *ou* $u = tg\ x$, *temos*:

$$du = \sec^2 x\,dx$$

$$\int e^{tg\,x}\cdot\sec^2 x\,dx = \int e^u\cdot du = e^u + C = e^{tg\,x}+C$$

INTEGRAÇÃO POR DECOMPOSIÇÃO DA FUNÇÃO INTEGRANDA EM FUNÇÕES MAIS SIMPLES

Integrais do tipo: $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx$ podem ser obtidas decompondo-se a fração $\frac{1+x}{1+x^2}$ na forma: $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$.

Temos então: $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$ onde: $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\ x + C$

e $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$

Portanto: $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx = arc\,tg\ x + \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$

EXEMPLOS

Calcular as integrais:

a) $\int \frac{4}{1-x^2}dx$

Resolução

Note que essa não é uma integral imediata. Mas, podemos observar que a fração $\frac{4}{1-x^2}$ *pode ser escrita como soma de outras cujos denominadores são os fatores de 1º grau de* $1-x^2$, *ou seja,* $(1+x)$ *e* $(1-x)$. *Assim:*

$\frac{4}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$, logo:

$$\frac{4}{1-x^2} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{A+Ax+B-Bx}{(1-x)(1+x)} = \frac{A+B+Ax-Bx}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{(A+B)+(A-B)x}{(1-x)(1+x)}$$

Comparando os termos, temos:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow 2A=4 \Rightarrow A=2 \quad e \quad B=2$$

Logo: $\frac{4}{1-x^2} = \frac{2}{1-x} + \frac{2}{1+x}$

Então: $\int \frac{4}{1-x^2}dx = \int\left(\frac{2}{1-x} + \frac{2}{1+x}\right)dx =$

$$= 2\int \frac{1}{1-x}dx + 2\int \frac{1}{1+x}dx = 2\int \frac{1}{1-x}dx + 2\int \frac{1}{1+x}dx =$$

$$= 2\cdot\ln\left|1-x\right| + 2\cdot\ln\left|1+x\right| + C = 2\cdot\left[\ln\left|1-x\right| + \ln\left|1+x\right|\right] + C =$$

$$= 2\cdot\ln\left|(1-x)(1+x)\right| + C = 2\cdot\ln\left|1-x^2\right| + C$$

b) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

Resolução

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2 \quad e \quad x_2=3$

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$

$x^2-5x+6=1\cdot(x-2)(x-3)=(x-2)(x-3)$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{Ax+Bx-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

Comparando os termos:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-1 \quad e \quad B=1$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

Integrando os dois membros, temos:

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=\int \frac{-1}{x-2}\,dx+\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=-\int \frac{1}{x-2}\,dx+\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=-\ln|x-2|+\ln|x-3|+C=$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=\ln|x-3|-\ln|x-2|+C \quad (\textit{Aplicamos propriedade de logaritmos})$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Para o cálculo de integrais da forma $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$, vamos retornar, de início à regra de derivação do produto de duas funções: $f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Daí, temos que:

$f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x)]' - f'(x)\cdot g(x)$,

o que integrando membro a membro, teremos:

$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int f(x)\cdot g(x)]'\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

Como uma primitiva de $f(x)\cdot g(x)]'$ é $f(x)\cdot g(x)$, vem:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Percebe-se, então, que, para o cálculo da integral do produto de duas funções, o que se coloca como fundamental é a escolha de qual das funções será chamada de f(x) e qual será chamada de g'(x), já que a esperança no uso da fórmula acima é de que a integral em que cairemos seja mais simples do que a integral pedida.

Exemplo:

Resolver $\int x\cos x\,dx$

Resolução

$$\text{Vamos considerar} \begin{cases} x = u,\ \text{onde}\ dx = du \\ \quad e \\ \cos x\,dx = dv,\ \text{onde}\ \int \cos x\,dx = \int dv \end{cases}$$

assim, se $\int \cos x\,dx = \int dv$, *então* $sen\ x = v$

logo, pela fórmula $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$, *temos*

$\int x\cos x\,dx = uv - \int v\,du$

$\int x\cos x\,dx = x\cdot sen\ x - \int sen\ x\,dx$

$\int x\cos x\,dx = x\cdot sen\ x - (-\cos x) + C$

$\int x\cos x\,dx = x\cdot sen\ x + \cos x + C$

SEMINÁRIO 13: TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO APLICAÇÕES DA DERIVADA.

Derivadas possuem diversas aplicações

No dia-a-dia das salas de aula, os alunos sempre nos questionam onde são aplicados os conhecimentos que estão sendo abordados. Por isto neste post queremos mostrar que as Derivadas possuem diversas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento.

Aplicação das derivadas na otimização

Talvez a mais difundida aplicação das derivadas nas universidades seja na otimização de problemas. Onde utilizamos as derivadas para obter a maximização ou minimização de um determinado fenômeno. Para ser mais claro apresentarei alguns exemplos, sendo que alguns delas já abordamos em posts recentes

- Minimização do consumo de material;
- Maximização do lucro em função das despesas;
- Maximização da área em função do seu perímetro;
- Otimização do tempo na produção industrial.

Poderíamos elencar muitos outros problemas de máximos e mínimos, mas como fazem parte de outras áreas do conhecimento deixaremos para mais adiante.

Aplicação das derivadas na física

Queremos deixar claro que nosso objetivo não é esgotar as possibilidades das aplicações na física, apenas exemplificar. Assim apresentaremos apenas as aplicações que julgamos mais comuns e que provavelmente você já tenha ouvido falar. A primeira delas a velocidade que é a derivada do espaço em relação ao tempo

$$v(t) = \frac{ds}{dt},$$

onde ***v*** é a velocidade e ***s*** a posição. Na sequência, a aceleração que é a derivada da velocidade em relação ao tempo

$$a(t) = \frac{dv}{dt},$$

onde ***a*** é a aceleração. Assim se temos a equação que descreve a posição de uma determinada partícula, conseguimos obter a equação da velocidade e da aceleração. Outra aplicação é a força que é derivada de seu momento linear em relação ao tempo.

Aplicação das derivadas na biologia

Na biologia, trazemos o uso das derivadas no estudo do crescimento populacional. O tamanho de uma certa população em um determinado instante é dado pelas taxas de natalidade e de mortalidade. Como já apresentamos, as taxas relacionadas são duas ou mais quantidades variando simultaneamente entre si, logo são derivadas.

Claro que problemas de crescimento populacional não são problemas simples de serem resolvidos. Entretanto, nosso objetivo aqui era exemplificar um dos casos em que as derivadas são utilizadas na biologia.

Aplicação das derivadas na administração

As aplicações das derivadas na administração são fortemente ligada a economia, pois na maior parte das vezes são problemas que envolvem a minimização de custos ou a maximização de lucro, como apresentamos no item acima da otimização. Na linguagem mais especifica de administradores e economistas, o ***custo marginal***, que é variação do custo total de produção em função da quantidade unitária produzida, este é expresso através da derivada do custo total pela quantidade produzida

$$C_m = \frac{C_t}{Q},$$

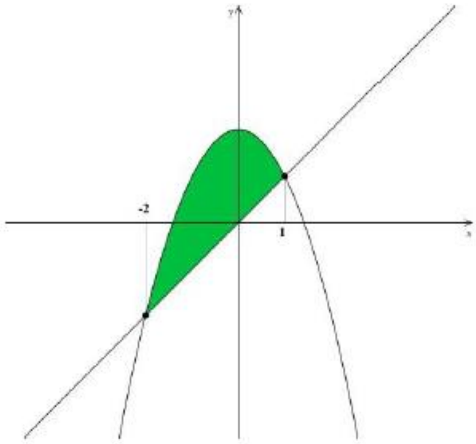
onde C_m é a função de custo marginal, C_t o custo total e Q a quantidade total produzida. As Derivadas possuem diversas aplicações em inúmeras outras áreas, como na química (exemplo na Lei de Boyle), medicina (exemplo concentração de um substância no organismo) entre outras. Nosso objetivo foi apenas apresentar uma ideia em que as Derivadas possuem diversas aplicações, para casos mais específicas você devem consultar bibliografias que são referências na área desejada.

SEMINÁRIO 14: APLICAÇÕES DA INTEGRAL.

A aplicação mais direta das integrais é o cálculo de áreas sobre curvas. A própria definição de integral nos traz essa aplicação, quando fazemos a integral de uma função do ponto ao ponto estamos calculando a área sobre a curva de entre esses pontos. Ao introduzirmos a Integral Definida vimos que ela pode ser usada para calcular áreas sob curvas. Veremos neste capítulo que existem outras aplicações. Essas aplicações estendem-se aos mais variados campos do conhecimento e, apenas para citar dois desses campos, destacaremos a Geometria e a Física. Na Geometria, além do cálculo de áreas sob curvas como já vimos, podemos usar a Integral Definida para calcular comprimento de arcos e volumes; na Física, para calcular o trabalho realizado por uma força, momento, centros de massa e momento de inércia, além de várias outras aplicações. Faremos aqui, apenas, aplicações geométricas.

Áreas entre curvas

Denominaremos por área entre curvas a área de regiões limitadas por curvas que são gráficos de funções. Vamos considerar, para melhor entendimento, o exemplo a seguir. Exemplo 11.1 Calcular a área limitada pelas curvas. Observe, no gráfico abaixo, que as curvas se interceptam nos pontos de coordenadas (1,1) e (−2, −2). A área procurada está representada pela região colorida.



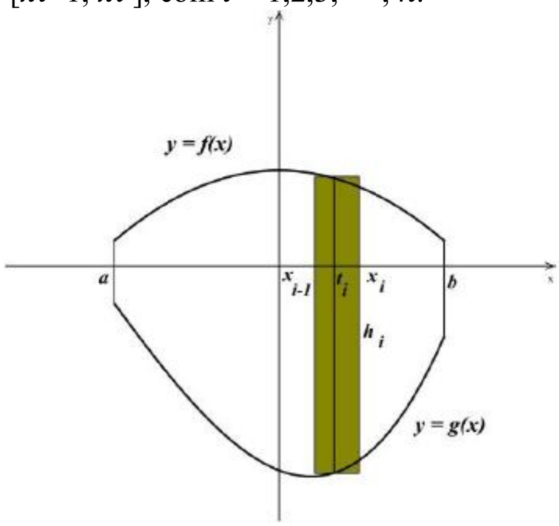
Usando a notação de área sob curvas podemos escrever:

$$A = A^{1}_{-\sqrt{2}}(-x^2 + 2) - A^{1}_{0}(x) + A^{0}_{-2}(-x) - A^{-\sqrt{2}}_{-2}(x^2 - 2)$$

E daí

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x\right]\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{1} - \frac{1}{2} + 2 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]\Bigg|_{-2}^{-\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

Este cálculo pode ser simplificado através do método que passaremos a descrever. Para isso vamos considerar duas funções f e g, contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, e a região do plano limitada pelos gráficos de f , de g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ (a figura abaixo é um esboço da região descrita). Façamos uma partição do intervalo $[a, b]$, através dos pontos: $a = x0 \leq x1 \leq \cdots \leq xi-1 \leq xi \leq \cdots \leq xn = b$ e sejam $\Delta xi = xi - xi-1$ e $ti \in [xi-1, xi\ ]$, com $i = 1,2,3, \cdots , n$.



Para cada i podemos inscrever na região considerada um retângulo de base Δxi e altura $hi\ (ti\ )$, como mostrado ao lado. A soma Sn das áreas desses retângulos, dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i(t_i)\Delta_{x_i}$$

é uma aproximação da área da região considerada.

Na construção das áreas dos retângulos referidos anteriormente devemos considerar os três casos diferentes para o cálculo de $hi\ (ti\ )$, em razão das diferentes situações que a região considerada pode se apresentar.

1) $f(t_i) \geq 0$ e $g(t_i) \geq 0 \Rightarrow h_i(t_i) = f(t_i) - g(t_i)$;
2) $f(t_i) \geq 0$ e $g(t_i) < 0 \Rightarrow h_i(t_i) = f(t_i) + |g(t_i)| = f(t_i) - g(t_i)$;
3) $f(t_i) < 0$ e $g(t_i) < 0 \Rightarrow h_i(t_i) = |g(t_i)| - |f(t_i)| = -g(t_i) + f(t_i) = f(t_i) - g(t_i)$.

Nos três casos temos $h_i(t_i) = f(t_i) - g(t_i)$ e, portanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i(t_i)\Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)]\Delta_{x_i}.$$

É de se esperar que, quando $\Delta_{x_i} \to 0$, a área procurada será dada por:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - g(t_i)]\Delta_{x_i} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Voltando ao Exemplo 11.1 podemos, agora, resolvê-lo pelo novo método:

$$\int_{-2}^{1} [-x^2 + 2 - x]\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Volumes de sólidos de revolução

Muitos dos sólidos com que trabalhamos podem ser obtidos através da rotação de uma região plana em torno de um eixo, denominado eixo de rotação. A esfera, por exemplo, pode ser obtida girando um semicírculo em torno de um eixo que contenha o diâmetro do semicírculo. Sólidos obtidos dessa forma são chamados sólidos de revolução. Dada certa região plana pode-se gerar uma infinidade de sólidos de revolução, cada um deles obtido em função de um determinado eixo de rotação. Consideraremos somente as situações em que o eixo de rotação é paralelo a um dos eixos coordenados e região plana limitada por gráficos de funções contínuas. Para tanto, seja $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tomemos a região limitada pelo gráfico da função, pelo eixo x e pelas verticais $x = a$ e $x = b$ (Fig.1). A Fig.2 apresenta o sólido de revolução gerado pela rotação da região descrita, em torno do eixo x (Fig. 2).

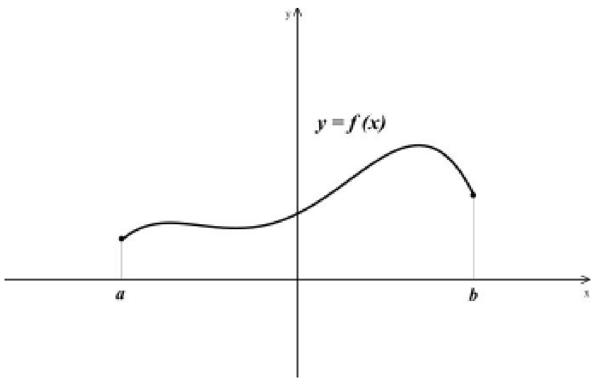


Fig.1

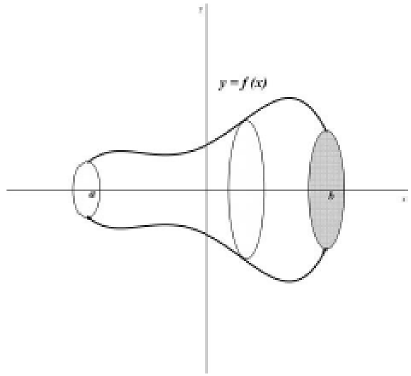
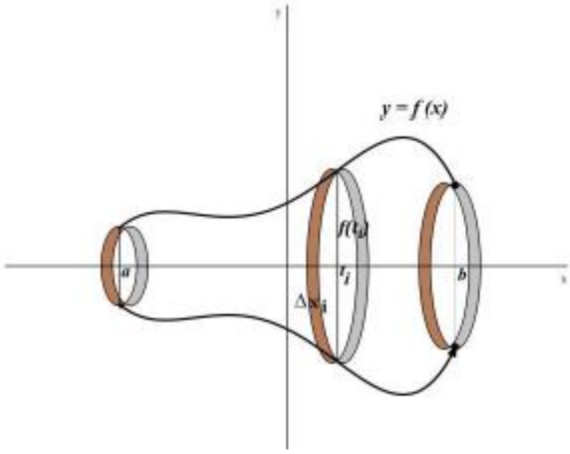


Fig.2

Para chegarmos à integral definida que nos dê o volume do sólido de revolução, obtido como anteriormente, comecemos com uma partição do intervalo $[a, b]$ e a construção de uma Soma de Riemann. Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ através dos pontos

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \cdots \leq x_n = b$$

Consideremos $ti \in [xi-1, xi]$, $\Delta xi = xi - xi-1$ com $i = 1,2,3, \cdots , n$ e, também, como conhecida, a fórmula para o cálculo de volume de um cilindro circular reto. O volume V que queremos encontrar será aproximado por uma soma de volumes de cilindros, construídos como na figura a seguir.



Os cilindros considerados possuem raio de base igual a $|f(ti)|$ e altura Δxi . Assim o volume Vi , do i-ésimo cilindro é dado por

$$V_i = \pi[f(t_i)]^2 \Delta_{x_i}$$

A soma dos Vi , indicada por Sn, nos dá uma aproximação do volume pretendido, ou seja,

$$V \cong S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(t_i)]^2 \, \Delta_{x_i} \cdot$$

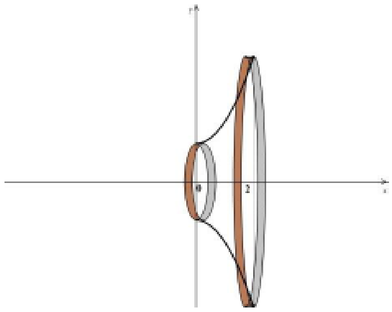
Não é difícil constatar que essa aproximação torna-se cada vez melhor, à medida que aumentamos os pontos da partição tomada para o intervalo $[a, b]$. Além disso, a soma apresentada é uma Soma de Riemann para a função

$$F(x) = \pi[f(x)]^2$$

no intervalo $[a, b]$. Portanto, podemos definir o volume de revolução por

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx.$$

Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$, $x = 2$ e pelo eixo x.



$$V = \int_0^2 \pi(x^2+1)^2\, dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]\Bigg|_0^2 = \frac{206\pi}{15}$$

SEMINÁRIO 15: DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSSECANTE.

Representação das funções trigonométricas inversas
y = sen^{-1} x ou y = arc sen x

Cálculo da derivada de y = sen x
y = sen x >>> y’ = cos x

Cálculo da derivada de y = cos x
y = cos x >>> y’ = – sen x

Cálculo da derivada de y = tg x

$$y=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\Rightarrow y'=\frac{(\operatorname{sen}x)'\cos x-\operatorname{sen}x(\cos x)'}{\cos^2 x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow y'=\sec^2 x$$

Cálculo da derivada de y = cotg x

$$y=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\Rightarrow y'=\frac{(\cos x)'\operatorname{sen}x-\cos x(\operatorname{sen}x)'}{\operatorname{sen}^2 x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\Rightarrow y'=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}\Rightarrow y'=-\operatorname{cos sec}^2 x$$

Cálculo da derivada de y = sec x

$$y'=(\sec x)'\Rightarrow y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'\Rightarrow y'=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{-(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\Rightarrow y'=\operatorname{tg}x\cdot\sec x$$

Cálculo da derivada de y = cossec x

$$y'=(\operatorname{cos sec}x)'\Rightarrow y'=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)'\Rightarrow y'=\frac{-(\operatorname{sen}x)'}{\operatorname{sen}^2 x}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\Rightarrow y'=-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x}\Rightarrow y'=-\operatorname{cot gx}\cdot\operatorname{cos sec}x$$

Cálculo da derivada de y = sen^{-1} x

$$y=\operatorname{sen}^{-1}x\Rightarrow x=\operatorname{sen}y$$

$$\Uparrow$$

derivando em relação à x

$$\Downarrow$$

$$1=(\operatorname{sen}y)'\Rightarrow 1=y'\cos y\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\rightarrow|x|<1$$

Cálculo da derivada de y = cos^{-1} x

$$y = \cos^{-1} x \Rightarrow x = \cos y$$

$$\Uparrow$$

derivando em relação à x

$$\Downarrow$$

$$1 = (\cos y)' \Rightarrow 1 = -y'\text{sen}y \Rightarrow y' = \frac{-1}{\text{sen}y} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow |x| < 1$$

Cálculo da derivada de $y = tg^{-1}\,x$

$$y = tg^{-1}x \Rightarrow x = tgy$$

$$\Uparrow$$

derivando em relação à x

$$\Downarrow$$

$$1 = (tgy)' \Rightarrow 1 = y'\sec^2 y \Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{1+tg^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Cálculo da derivada de $y = cotg^{-1}\,x$

$$y = \cot g^{-1}x \Rightarrow x = \cot gy$$

$$\Uparrow$$

derivando em relação à x

$$\Downarrow$$

$$1 = (\cot gy)' \Rightarrow 1 = y'(-\cos\sec^2 y) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\cos\sec^2 y} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-1}{1+\cot g^2 y} \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Cálculo da derivada de $y = sec^{-1}\,x$

$$y = \sec^{-1} x \Rightarrow x = \sec y$$

$\Uparrow$

derivando em relação à x

$\Downarrow$

$$1 = (\sec y)' \Rightarrow 1 = y'(\sec y \cdot tg y) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sec y \cdot tg y} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\sec y.\sqrt{\sec^2 y - 1}} \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow |x| > 1$$

Cálculo da derivada de y = cossec^{-1} x

$$y = \operatorname{cossec}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{cossec} y$$

$\Uparrow$

derivando em relação à x

$\Downarrow$

$$1 = (\operatorname{cossec} y)' \Rightarrow 1 = y'(-\operatorname{cossec} y \cdot \cot g y) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\operatorname{cossec} y \cdot \cot g y} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-1}{\operatorname{cossec} y.\sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1}} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow |x| > 1$$

SEMINÁRIO 16: APLICAÇÃO NA PREVISÃO DO TEMPO; ENGENHARIA DE PRODUÇÃO; VELOCIDADE INSTANTÂNEA.

Um exemplo prático sobre derivadas é a determinação de taxa de variação de alguma coisa devido a mudanças sofridas em uma outra. Um exemplo bem comum da aplicação de derivadas, retirado do artigo publicado por Almeida, Amaral e Ferreira (2017), é a previsão do tempo, a qual está em constante mudanças devido a diversos fatores. Logo, sabe-se que partir da meia noite a temperatura em uma determinada cidade varia de T graus em t horas, sendo definida pela seguinte função: $T = 0{,}1(400 - 40t + t^2)$, no qual $0 \leq t \leq 12$

Aplicando-se a regra da derivada de uma função constante e a regra da potência, pode-se calcular a derivada de T em função do tempo t e obter:

$$dT/dt = 0{,}1.\ (-40 + 2t)$$

Utilizando-se a propriedade distributiva e multiplicando-se a função acima por 0,1 obtém-se:

$$dT/dt = -4 + 0{,}2t$$

Com a finalidade de calcular a derivada entre o período das cinco horas às seis horas, é necessário o cálculo da média destas horas. Assim tem-se t = 5,5. Aplicando este período na função derivada, obtém-se:

$$dT/dt = -4 + 0{,}2.\ 5{,}5 \text{ e } dT/\ dt = -2{,}9\ grau.$$

A taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,6m a 2,8m. Seja y a área do quadrado e o seu lado, então temos y=f(x)=x^2.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2{,}8) - f(2{,}6)}{2{,}8 - 2{,}6} = \frac{(2{,}8)^2 - (2{,}6)^2}{0{,}2} = \frac{7{,}84 - 6{,}76}{0{,}2} = 5{,}4$$

Uma caixa d'água em forma cúbica de aresta x é preenchida com água, determine:

a) A taxa de variação media do seu volume t_m quando o nível da água passa de $x = 2m$ a $x =\ 2{,}5\ m$.

b) A taxa de variação instantânea de seu volume t em relação à aresta x no momento em que o nível da água esta a $x =\ 4m$

Solução: O volume t da caixa é dado por $t(x)\ = x^3$ e denotemos t_m a taxa de variação média do volume.

$$t_m = \frac{t(2{,}5) - t(2)}{2{,}5 - 2} = \frac{(2{,}5)^3 - 2^3}{0{,}5} = \frac{7{,}625}{0{,}5} = 15{,}25$$

b) $t'(x) = 3x^2$, quando $x = 4$, temos, $t'(4) = 3.\,4^2 = 48m^3$

Uma bola desloca-se numa rampa segundo a lei f(t)=2t^2, onde f(t)= representa a distância percorrida em metros em segundos. Determine: a) A taxa média de variação da função no intervalo (0,8) e b) A taxa instantânea de variação da função no instante t=2s.

Solução:

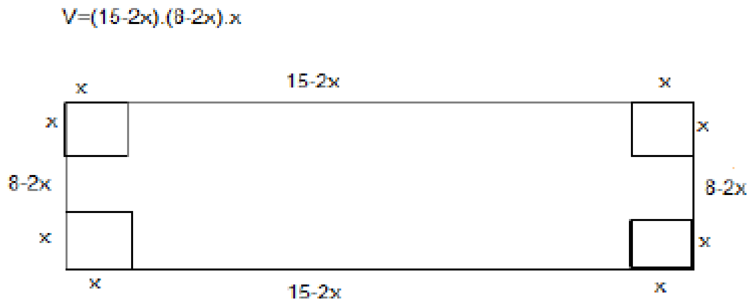
a) Seja $y = f(t)$, a taxa média de variação será dada por: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(8) - f(0)}{8-0} = \frac{2.8^2 - 2.0^2}{8} = 16\ m/s$

b) A taxa instantânea de variação no instante $t\ =\ 2$ é o limite, se existir, da taxa média de variação quando $t \to 0$, isto é, a derivada de $f(t)$, no instante $t = 2s$.

$f'(t) = 4t \to f'(2) = 4.2 = 8m/s$. O valor obtido é a velocidade instantânea no instante $t\ =\ 2s$, que é 8 m/s.

SEMINÁRIO 17: APLICAÇÃO NA FÍSICA: CUSTO DE PRODUTO, MOLÉSTIA EPIDÊMICA, ALTURA MÁXIMA.

Uma empresa quer fabricar caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de uma folha retangular de papelão medindo 8cm por 15cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão, conforme figura. Determine o valor de a fim de que a caixa correspondente tenha o maior volume possível.



Observamos através da figura que o volume da caixa é obtido com a expressão

$$V(x) = (15 - 2x).(8 - 2x).x = 4x^3 - 46x^2 + 120x$$

agora vamos determinar os valores de x que tornam o volume da caixa o máximo possível.

Sabendo que se $(x = 0 \rightarrow V = 0), (x = 7{,}5 \rightarrow V = 0), \quad (x = 4 \rightarrow V = 0)$ e assim o valor de x que procuramos está no intervalo [0; 7,5]. Sendo $V(x)$ continua no intervalo [0; 7,5] segue-se que V tem um valor máximo absoluto neste intervalo que deve ocorrer num número critico ou em um dos extremos do intervalo.

Para encontrarmos os números críticos de $V(x)$, procuramos $V'(x)$ e determinamos os valores de x onde $V'(x) = 0$ ou $V'(x)$ não existe.

$V'(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x = 12x^2 - 92x + 120$. Logo $V'(x)$ existe para todos os valores de x.

Fazendo $V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$

$a = 12, b = -92, \quad c = 120$

$\Delta = (92)^2 - 4.(12).(120) = 2704 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{2704} = 52$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-92) + 52}{2.(12)} = \frac{144}{24} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-92) - 52}{2.(12)} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

$V(6) = 0 \quad$ e $\quad V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{850}{9}$

Logo o volume máximo será de $\frac{850}{9} cm^3$ quando $x = \frac{5}{3}$

SEMINÁRIO 18: INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO, TANGENTE, COTANGENE, SECANTE, COSSECANTE.

Para integrais com produtos de funções trigonométricas, lembre-se das derivadas de sen(x), cos(x), tg(x), sec(x), cotg(x) e cossec(x) e separe, seguindo o seu bom senso, termos com essas derivadas para facilitar uma substituição. Apresentadas as integrais de funções trigonométricas que se resolve através das relações trigonométricas bem como pelos métodos de resolução de integrais já apresentados. Desta forma, inicialmente serão apresentadas integrais que envolvem uma única função trigonométrica, dando sequência para algumas relações trigonométricas, finalizando com funções que envolvem estas relações trigonométricas.

$$\int sen\, u\, du \quad e \quad \int \cos u\, du$$

Estas integrais indefinidas são tabeladas como:

$$\int senu\ du = -\cos u + c$$ e

$$\int cosu\ du = sen\ u + c.$$

Lembrando que c é constante.
Vejamos um exemplo
Calcular

$$\int (x+1)sen(x+1)^2 dx$$

Fazendo a substituição

$$u = (x+1)^2 \rightarrow du = 2(x+1)dx$$

Portanto:

$$\frac{du}{2} = (x+1)dx$$

Desta forma a integral fica:

$$\int (x+1)sen(x+1)^2 dx = \int senu\ \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int senu\ du$$

$$= -\frac{1}{2} cosu + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x+1)^2 + c$$

Outro exemplo

$$\int_0^1 e^{2x}\cos(e^{2x})\,dx$$

Chamando

$$u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x}dx$$

Temos,

$$\frac{du}{2} = e^{2x}\,dx$$

Fazendo a substituição, temos:

$$\int_0^1 e^{2x}\cos e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int cosu\; du$$

$$= \frac{1}{2}\; senu = \frac{1}{2}\; sen\; e^{2x}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(sen\; e^2 - sen1)$$

Observe que no momento da substituição de e^{2x} por u os limites de integração não foram colocados. Apenas quando se substitui u por e^{2x} é que se recolocaram os limites de integração. Uma maneira mais elegante de se apresentar o cálculo é fazê-lo como se segue.

Chamando-se:

$$u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x}dx$$

Portanto

$$\frac{du}{2} = e^{2x}dx.$$

Substituindo-se os limites de integração.

$$x = 0 \rightarrow u = 1$$
$$x = 1 \rightarrow u = e^2$$

Assim,

$$\int_0^1 e^{2x}\cos(e^{2x})dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \cos u\; du = \frac{1}{2}\; senu\;\Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{1}{2}(sen\; e^2 - sen1)$$

INTEGRAIS DO TIPO

$$\int tgu\; du \text{ e } \int cotgu\; du$$

Lembrado que

$$tgu = \frac{senu}{cosu} \text{ e } cotg\; u = \frac{1}{tgu} = \frac{cosu}{senu}.$$

Portanto

$$\int tgu\, du = \int \frac{sen\, u}{\cos u}\, du$$

Substituindo

$$v = \cos u \rightarrow dv = -sen\, u\, du$$

Temos

$$sen\, u\, du = \; -dv$$

Assim,

$$\int tgu\, dv = \; -\int \frac{dv}{v} = \; -ln|v| + c$$

$$= -ln\, |\cos u| + c$$

$$= ln|(cosu)^{-1}| + c = ln\, \left|\frac{1}{cosu}\right| + c$$

$$= \ln|\sec u| + c$$

Pois

$$\frac{1}{\cos u} = \sec u$$

E também

$$\int cotg\, u\, du = \int \frac{\cos u}{sen\, u}\, du$$

Susbtituindo

$$v = sen\, u \rightarrow dv = \cos u\, du$$

Finalmente

$$\int cotg\, u\, du = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c$$

$$= \ln|sen\, u| + c$$

Para o caso de

$$\int \sec u \, du \quad e \quad \int cosec\, u \, du$$

Multiplicando por

$$\frac{\sec u + tgu}{\sec u + tg\, u} \quad e \quad \frac{cosec\, u - cotgu}{cosec\, u - cotg\, u}$$

Resolvendo

$$\int \sec u \, du = \int \frac{\sec u\, (\sec u + tg\, u)}{(\sec u + tg\, u)}\, du$$

Substituindo

$$v = \sec u\, tg\, u \rightarrow dv = (\sec u\, tg\, u + sec^2 u)\, du$$

Segue

$$dv = \sec u (tgu + \sec u) du$$

$$\int \sec u \, du = \int \frac{du}{v} = \ln|v| + c$$

$$= \ln|\sec u + tg\, u| + c$$

Reolvendo a cossecante

$$\int cosec\, u \, du = \int \frac{cosec\, u\, (cosec\, u - cotgu)}{(cosec\, u - cotg\, u)}\, du$$

Resolvendo

$$v = cosec\, u - cotg\, u \rightarrow dv = -cosec\, u\, cotg\, u - (-cosec^2 u)$$

$$dv = cosec\, u (cosec\, u - cotg\, u) du$$

Portanto

$$\int cosec\, u \, du = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c$$

$$= ln|cosec\, u - cotg\, u| + c$$

SEMINÁRIO 19: APLICAÇÃO NA FÍSICA: CALOR E REALIZAÇAO DE TRABALHO

Vamos entender como acontece algumas situações da Termodinâmica: como aquecimento, retração e dilatação. A partir daí, conhecer a definição, tendo a oportunidade de estudar as fórmulas e um aprofundamento nas aplicações utilizando o cálculo.

Exemplo

Sabemos que o raio do prato quando aquecido aumenta a uma taxa de:

$$\frac{dr}{dt} = 0,01cm/min.$$

Seja A, a área do prato e r o raio temos

$A = \pi \cdot r^2.$

Queremos a taxa da área do prato, que podemos escrever:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Diferenciamos a equação da taxa da área do prato, e temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot r \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Substituindo os valores temos:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,01$$

$$\frac{dA}{dt} = \pi cm^2/min$$

A área do prato aumenta a uma taxa de $\pi cm^2/min$.

Quando um prato circular de metal é aquecido em um forno, seu raio aumenta a uma taxa de 0, 01cm/min. A que taxa a área do prato aumenta quando seu raio é de 50cm?

SEMINÁRIO 20: APLICAÇÃO DA INTEGRAL NA FÍSICA

(FLUXO ELÉTRICO E CARGA ELÉTRICA)

Se **E** é um campo elétrico, então $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ é chamada **fluxo elétrico** de **E** através da superfície. A Lei de Gauss diz que a carga total englobada por S é

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E},$$

em que ϵ_0 é uma constante conhecida como *permissividade no vácuo*.

Se o campo vetorial do Exemplo anterior representa um campo elétrico, então a carga envolvida por S é $Q = 4\pi e_0/3$.

(FLUXO DE CALOR)

Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) seja $u(x, y, z)$. O **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\nabla u,$$

em que K é uma constante denominada **condutividade**. A **taxa de transmissão de calor** através da superfície S no corpo é dada por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}.$$

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral**. -2.ed.-São Paulo: Blucher, 2010.

BERLINGHOFF, William P., GOLVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil prático para professores e entusiastas.** Tradução: Elza Gomide, Helena Castro. -2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

DUARTE, Newton. **O ensino de matemática na educação de adultos**. -11.ed.- São Paulo: Cortez, 2009.

CANTÃO Luiza Amalia Pinto; CANTÃO, Renato Fernandes. Campus Experimental de Sorocaba –http://www.sorocaba.unesp.br/professor/cantao 2006> Acesso em: 08 mai. 2023.

EVES, HOWARD**. Introdução à história da matemática**. Tradução: Higino Domingues. - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FREITAS, Roseli Scaranello de Paula .**Aplicações do cálculo diferencial e integral: temperatura, calor e dilatação térmica.**Rio Claro, 2021.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 3.--9.ed.-- São Paulo: Atual, 2013.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Trad.: Cyro de Carvalho Patarra. Vol. 1.-3.ed.- São Paulo: Editora Harbra LTDA, 1994.

LIMA, E. L, P.C. P Carvalho, E Wagner, A.C. Morgado. **A matemática do ensino médio** vol.1. -10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MONTEIRO, Alexandrina. POMPEU, Geraldo. **A matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2001.

REIS, Prof. Clovis. CENTRO EDUCACIONAL MARAPENDI –CEMP GEOMETRIA – CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA.

Research, Society and Development, v. 11, n. 2, e5011224025, 2022 (CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v11i2.24025 Acesso em: 08 mai. 2023.

ROGAWSKI, Jon. **Cálculo**. Trad.: Claus Ivo Doering. -vol.1. Porto Alegre: Bookman, 2009.

Silva, Eliseu do Nascimento. **Uma introdução ao estudo das derivadas no Ensino Médio-** 2016. 57 f. : il.

STEWART, James. **Cálculo: Volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

<https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/limites-derivadas-e-ntegrais/derivadas/derivadas-das-funcoes-trigonometricas/> Acesso em: 08 mai. 2023.

<http://www.lapolli.pro.br/escolas/unicid/CalDifIntII/teoria/2_2-Funtrigo.pdf.> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://www.dicasdecalculo.com.br/possuem-diversas-aplicacoes/> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://joaquimprofessor.files.wordpress.com/2011/05/10-mc3a9todos-de-integrac3a7c3a3o.pdf> Acesso em: 08 mai. 2023.

< https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/regras-derivacao.htm> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://www.colegioweb.com.br/matematica/derivada-integral-calculos-fundamentais-matematica.html> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/equacao-e-inequacao-trigonometrica.htm> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/reducao-ao-primeiro-quadrante-no-ciclo-trigonometrico.htm> Acesso em: 08 mai. 2023.

https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/primeira-relacao-fundamental-trigonometria.htm> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://www.sienge.com.br/blog/teodolito-topografia/> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://impa.br/noticias/para-que-serve-o-teorema-de-pitagoras/#:~:text=At%C3%A9%20hoje%2C%20o%20Teorema%20%C3%A9,simples%20e%20importantes%20da%20geometria.> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/o-teorema-pitagoras-no-cotidiano.htm> Acesso em: 08 mai. 2023.

<https://www.todamateria.com.br/trigonometria-no-triangulo-retangulo/#:~:text=As%20raz%C3%B5es%20trigonom%C3%A9tricas%20s%C3%A3o%20as,cateto%20adjacente%20sobre%20a%20hipotenusa.> Acesso em: 08 mai. 2023.