UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PAULO AFONSO PAZ FERREIRA

O USO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E A IMPLEMENTAÇÃO COM O USO DO GEOGEBRA

MANAUS,
MAIO 2022

PAULO AFONSO PAZ FERREIRA

O USO DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E A IMPLEMENTAÇÃO COM O USO DO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador(a): Silvia Cristina Belo e Silva

Co-orientador(a): Geraldine Silveira Lima

MANAUS,

MAIO 2022

AMAZONAS
GOVERNO DO ESTADO

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de Paulo Afonso Paz Ferreira

Em 18 de maio de 2022, às 16h, na sala José Braga na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dra. Silvia Cristina Belo e Silva, Ma. Elaine Ladislau Ferreira Pereira e Dra. Nadine Mustafa Moraes, o(a) aluno(a) Paulo Afonso Paz Ferreira apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "**O uso das equações quadráticas em problemas de otimização e a implementação com o uso do Geogebra**" A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 8,9 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Jorge de Menezes Rodrigues
Presidente da Banca Examinadora

Silvia Cristina Belo Silva.
Orientador (a)

Elaine Ladislau F. Pereira
Avaliador 1

Nadime Mustafa Moraes
Avaliador 2

Aluno

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, aos meus pais, grandes colaboradores e incentivadores, amigos e também à minha orientadora professora, Silvia Cristina Belo e Silva.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida.

Aos meus familiares e amigos por todo incentivo durante minha caminhada estudantil.

À minha orientadora Professora, Silvia Cristina Belo e Silva, por toda sua dedicação e eficiência na elaboração desse trabalho.

Meus agradecimentos também, à minha co-orientadora professora, Geraldine Silveira Lima, por toda a sua colaboração e à todo o colegiado da Escola Normal Superior, que dispuseram o seu tempo na indicação de livros, sites e materiais auxiliares.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo central trabalhar com problemas de otimização no Ensino Médio, fazendo uma implementação com o Software Geogebra que permite uma melhor visualização da solução do problema. A proposta, é inserir os problemas de otimização para complementar o estudo da funções quadráticas, permitindo que o aluno resolva alguns problemas concretos, que muitas vezes aparece em seu cotidiano. Os problemas abordados neste trabalho, vem de encontro com esta proposta, viabilizando uma aprendizagem mais significativa aos alunos.

Palavras-Chave: Equação do 2° grau; Otimização; GeoGebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como tema o uso das equações quadráticas em problemas de otimização e a implementação com o uso do Geogebra. A implementação da solução com a utilização do software Geogebra, nos permitirá comprovar geometricamente a solução ótima desses problemas.

A equação do 2° grau, também conhecida como equação quadrática, é um conteúdo dentro da disciplina de matemática com aplicabilidade não apenas dentro desta disciplina, permeando também dentro de outras áreas do conhecimento. A sua importância em diversas áreas e situações concretas são fatores que tornam o tema interessante e importante, podendo ser amplamente explorado e utilizado, por exemplo em áreas, como: engenharia, administração, física, biologia, economia entre outros.

A busca por uma relação entre solução de problemas diários e a aplicabilidade das equações quadráticas, despertou o interesse pelo tema, de forma a fazer uma abordagem prática como uma maneira de tornar o ensino e a aprendizagem das equações quadráticas mais significativo. Neste sentido, este trabalho investiga a aplicação das equações quadráticas em problemas de otimização, utilizando-se de um Software que irá permitir a visualização geométrica da solução desses problemas.

Conseguir aplicar a teoria ensinada pelo professor é algo que torna a matemática mais atraente ao aluno. Neste contexto, o problema pode ser descrito pela seguinte pergunta norteadora: Como resolver problemas de otimização no Ensino Médio, utilizando equações quadráticas, e de que forma o Software Geogebra pode contribuir na compreensão da solução desses problemas?

O objetivo geral do projeto é encontrar solução ótima de problemas permeados no nosso cotidiano utilizando equações de segundo grau com a implementação do Geogebra que irá permitir explorar não apenas a linguagem algébrica, mas também a gráfica, de modo à atender os seguintes objetivos específicos: resolver problemas de otimização no Ensino Médio; utilizar as equações de segundo grau para resolver problemas de otimização; mostrar a importância do software Geogebra em problemas de otimização.

A seguir, estão estruturados em três capítulos os tópicos deste projeto: no primeiro capítulo, é apresentada a revisão de literatura que irá abordar toda parte contextualizada da equação de 2° grau, destacando seu surgimento, os principais povos e os que mais contribuíram para que hoje tivéssemos as ferramentas necessárias para resolução dessa equação e uma proposta de resolução de problemas de otimização implementando com uso de Geogebra, bem como características importantes deste software.

No capítulo 2 deste trabalho, será abordado a metodologia da pesquisa, o tipo de pesquisa e o tipo de procedimento técnico realizado.

No capítulo 3 faremos uma breve apresentação do software Geogebra, como seu surgimento e algumas propriedades. Faremos também uma breve abordagem das principais definições utilizadas nos exercícios e para concluir apresentamos diversos problemas que podem ocorrer no nosso cotidiano e que facilmente à partir de uma breve interpretação podem ser solucionados à partir das equações quadráticas, tendo sua solução verificada no software Geogebra.

.

CAPÍTULO 1

REVISÃO DE LITERATURA

1.1 Aspectos Históricos da Equação Quadrática

Babilônios, egípcios e gregos utilizavam técnicas capazes de resolver as equações quadráticas anos antes de Cristo. Babilônios e egípcios utilizavam-se de textos e símbolos como ferramentas auxiliar na resolução. Os gregos conseguiram concluir suas resoluções realizando associações com a geometria, pois eles possuíam uma forma geométrica para solucionar problemas ligados a equação do 2° grau.

Dentre os indianos, os matemáticos Sridhara, Bramagupta e Bhaskara também contribuíram para o desenvolvimento da Matemática, fornecendo importantes informações sobre as equações do 2° grau. Sridhara foi o primeiro a estabelecer uma fórmula matemática para a resolução das equações biquadradas, pois, Bramagupta e Bhaskara trabalhavam utilizando textos. Os árabes foram brilhantemente representados por Al- Khowarizmi, que se baseando no trabalho dos gregos, criou metodologias para a resolução de equações de 2° grau. A representação geométrica utilizadas por Al-Khowarizmi são influenciadas por Euclides, Boyer (2012).

Foi com o Francês Viete que o método resolutivo das equações do 2° grau ganharam símbolos e letras. Viete é o responsável pela modernização da álgebra. Seus trabalhos foram desenvolvidos por outro Francês, denominado René Descartes.

Podemos observar que a expressão matemática utilizada atualmente para a resolução de uma equação de 2° grau, não deve ser atribuída somente à uma pessoa, mas a vários pesquisadores que através de inúmeros trabalhos, desenvolveram a seguinte expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2 Fatos Históricos

Egito

São conhecidos poucos registros do tratamento da equação do 2° grau pelos egípcios, mas os historiadores suspeitam que eles dominavam alguma técnica de resoluções dessas equações.um exemplo encontra-se no papiro de Berlin e remota aproximadamente ao ano 1950 a.C. também foi encontrada no papiro Kahun uma resolução de equação, hoje escrita como $x^2 + y^2 = k, k$ um número positivo pelo método da falsa posição, desenvolvido pelos egípcios para resolver equações do 2° grau.

Mesopotâmia

O primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo a equação do 2°grau data 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. A solução era apresentada como uma "receita matemática" e fornecia somente uma raiz positiva. Os mesopotâmios enunciavam a equação e suas resoluções em palavras.

Grécia

Acredita-se que a dificuldade no tratamento com os números, racionais e irracionais, e a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela a geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do 2 °grau.

Índia

A matemática hindu produziu até o renascimento grandes personagens, dentre os quais destacam-se Aryabhata (séc. VI d.C), Brahamagrupta (séc VII d.C), sridhara (séc XI d.C) e Bhaskara (1114-1185), que muitos contribuíram para a resolução da equação do 2°grau ao resolver o problema.

Arábia

Se, por um lado diz a tradição, os árabes foram responsável pelo desaparecimento do saber ocidental, por outro lado contribuíram para sua preservação. Segundo consta, o extermínio se deu quando, em 641 d.C., o califa Omar mandou que fosse destruída a biblioteca de Alexandria. E a preservação foi obra de três califas, considerados os grandes patronos da cultura abássida: al-Mansur, Harum al-rachid e al-Mamum, que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, o Almagesto de Ptolomeu e os elementos de Euclides. Nessa obra a equação do 2° grau, bem como sua resolução, de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada método de completar quadrado

1.3 Introdução aos Problemas de Otimização no Ensino Médio

Desde os primórdios o homem procurou respostas para diversas perguntas como por exemplo: “Qual o caminho mais curto para se chegar a certo lugar?” “Qual o menor custo na fabricação de determinada mercadoria?” “De que maneira, posso construir um recipiente com volume fixo de modo a gastar a menor quantidade de material possível?”

Otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto de variáveis. Nos problemas de otimização, procuramos determinar a solução ótima. Quando envolve funções quadráticas, à partir da função que modela o problema, sua solução se resume a determinar o valor de x do vértice da função.

Estes problemas aparecem quando procuramos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, o ponto da órbita de um cometa mais próximo da terra, a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da terra, obtenção de um maior lucro na venda de uma mercadoria, o gasto mínimo na construção de uma casa, etc.

Segundo o Dante(1998) esse conteúdo contribui bastante nas resoluções de algumas áreas como: engenharia, administração e até na biologia.

Segundo, (POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 2aEd., 2006).:

> Vez ou outra, deve-se oferecer à classe um problema importante, rico em conteúdo e que possa servir de abertura para um capítulo inteiro de Matemática. E a classe deveria trabalhar com tal problema de pesquisa, sem pressa e de modo que , segundo o princípio do ensino ativo, os alunos possam descobrir (ou sejam levados a descobrir) a solução e possam explorar sozinhos algumas consequências da solução.

A resolução da maioria dos problemas de otimização requer conhecimentos de Cálculo Diferencial. No entanto, é possível e até mesmo em alguns casos mais prático, resolver este tipo de problema quando o mesmo é modelado por uma função quadrática. Como já vimos, toda função quadrática tem um valor extremo, que ocorre no vértice de seu gráfico.

> Otimizar v. td 1 Melhorar ao Máximo as condições de; aproveitar ao Maximo (meios, desempenho, processos etc), de modo a obter os melhores resultados possíveis: A empresa conseguiu otimizar sua produção. Melhorar(programas) de modo a ser mais simples e o mais rápido possível. Estabelecer valor ótimo de uma grandeza.(AULETE,2011,P.1007)

A escolha do tema desse TCC se deu pelo fato da crescente importância e desenvolvimento desse tema na resolução de problemas diários, e pela importância de despertar no aluno, conhecer e investigar a utilização de determinados conteúdos estudados no Ensino Médio, como por exemplo as equações quadráticas, promovendo assim atividades contextualizadas e interdisciplinares.

Segundo Polya (2006) problemas de otimização despertam curiosidade trazendo assim o interesse do estudande pelo conteúdo, fazendo com que eles trabalhem em problemas muitas vezes até com grande relevância para a sociedade.

> Aprender a matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar x nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber este mesmo problema, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar e transceder o imediatamente sensível(PARANÁ, 1990, p. 66).

1.4 Proposta da Resolução de Problemas de otimização implementando com uso de Geogebra

Para o desenvolvimento deste trabalho, iremos usar o software educativo GeoGebra,que é uma ferramenta de extrema importância que auxilia no aprendizado do aluno.

> GeoGebra é um software de matemática dinâmica para utilizar em ambientes de salas de aula, que reúne Geometria, álgebra e cálculo. Recebeu muitos prêmios internacionais incluindo o premio de software educativo Alemão e Europeu. Idealizado e criado por Markus Hohenwarterodar na Universidade de Salzburg.(FERREIRA, 2010, p. 3)

Segundo o PCNS Brasil (1998) o GeoGebra é um recurso tecnológico que esta sendo muito útil em diversas escolas, no ensino da matemática. É de extrema importância para rever conceitos, resolver problemas e até mesmo introduzir um novo assunto. Ele desperta o interesse do aluno, pois permite ao estudante visualizar as resoluções dos problemas, com representações gráficas detalhadas, mostrando de maneira minusiosa o comportamento de cada função.

A utilização do software Geogebra, tem contribuído de maneira eficaz no aprendizado dos alunos. Através dessa ferramenta os docentes podem de maneira muito mais eficiente fazer a construção de gráficos e tabelas, em um só programa.

Para D'Ambrósio (2002, p.74), estamos vivendo na era chamada de " sociedade do conhecimento", onde não há mais uma justificativa para que a escola ainda apresente conhecimentos "obsoletos e ultrapassados e muitas vezes mortos",em especial quando se fala de ciência e tecnológia. Para o autor, a escola deve estar integrada aos valores e expectativas da sociedades, quanto a sua capacidade de gerar, organizar e difundir " conhecimento vivo", o que só será possível através da ampla utilização das tecnologias na educação, pois segundo o autor, a educação do futuro passará pela informática e comunicação.

A tecnologia tem permitido um avanço fundamental na educação. Com o surgimento dessa ferramentas, diversas escolas tem se apropriado de software que permite, um aprendizado muito mais dinâmico e eficaz para o aluno.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA, de significativa contribuíção na educação. O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarte e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300 mil downloads mensais, 62 institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso (GOMES, 2013).

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1 Abordagem e as Estratégias de Investigação

A abordagem metodológica da pesquisa é quantitativa pois está voltada ao desenvolvimento de teoremas e modelos. Fonseca (2002, p. 20) apud (GERHARDT,T. E; SILVEIRA,D. T, 2009, P.35) nos fala que

> Diferentemente da pesquisa qualitativa, os resultados da pesquisa quantitativa podem ser quantificados. Como as amostras geralmente são grandes consideradas representativas da população, os resultados são tomados como se constituíssem um retrato real de toda a população alvo da pesquisa. A pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhido com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre a linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que poderia conseguir isoladamente.

A pesquisa é descritiva, pois exige do investigador uma série de informações. Fazendo um estudo para tentar mostrar fenômenos ou população tentando uma interpretação (TRIVIÑOS,1987).

> Para Triviños (1987, p. 112), os estudos descritivos podem ser criticados porque pode existir uma descrição exatas dos fenômenos e dos fatos. Estes fogem da possibilidade de verificação através da observação. Ainda para o autor, as vezes não existe por parte do investigador um exame crítico das informações, e os resultados podem ser equivocados; e as técnicas de coletas dedados, como questionários, escala se entrevistas podem ser subjetivas, apenas quantificáveis, gerando imprecisão.

Conforme afirma Fonseca (2002), a pesquisa possibilita uma aproximação do real, um entendimento da realidade a investigar, como um processo permanentemente inacabado. Ela se processa através de aproximações sucessivas da realidade, fornecendo subsídios para uma intervenção no real.

Esta pesquisa justifica-se pela necessidade de investigação de aplicações das equações quadráticas em problemas de otimização, e implementação com o uso do Software Geogebra.

2.2 Procedimento Técnico

O procedimento técnico utilizado é a revisão bibliográfica. Para Gil (2007, p.14),os exemplos mais característicos desse tipo de pesquisa são sobre investigações sobre ideologias ou aquelas que se propõem a análise das diversas posições à cerca de um problema.

Como definido por Boccato (2006) *apud* (Pizzani, Silva, Belo e Hayashi,2012, p.54):

> a pesquisa bibliográfica busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica. Para tanto, é de suma importância que o pesquisador realize um planejamento sistemático do processo de pesquisa, compreendendo desde a definição temática, passando pela construção lógica do trabalho até a decisão da sua forma de comunicação e divulgação.

E como Boccato já menciona esse tipo de procedimento está interligado com estudo e referências em obras e trabalhos correlatos ao que está sendo pesquisado.

2.3 Instrumentação e Medida

A utilização de ferramentas tecnológicas nas aulas de matemáticas, como o software GeoGebra vem para estreita relação dos estudantes com as tecnologias digitais, tornando-se mais atrativas, potencializando a eficiência da aprendizagem do conteúdo, além de promover a inclusão digital. O exponencial crescimento tecnológico exige uma formação contínua do professor: a preparação desse profissional é condição para o sucesso do uso de tecnologias digitais em sala de aula. Nesse sentido faz-se necessário a inserção dessas ferramentas tecnológicas em nossa pratica pedagógica, conforme recomendam as orientações Curriculares para o Ensino Médio.

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la: por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois

> sentidos, ou seja, a matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta, para entender a matemática. (BRASIL,2006,p.87).

2.4 Métodos utilizados para obtenção de equações

Nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio, os problemas de otimização explorados quase sempre estão relacionados às funções quadráticas. Neste, o passo mais trabalhoso é encontrar a função que modela o problema. Feito isso, resolver o problema resume-se à encontrar o vértice da função.

Nos cursos superiores de Matemática ou áreas afins, os problemas de Otimização são geralmente solucionados com o uso das derivadas. Bom ressaltar, que uma outra ferramenta utilizada no Ensino Médio, são as desigualdades das médias, mas que não serão abordadas neste trabalho.

Neste sentido, a essência da otimização é melhorar algo em um conjunto de alternativas disponíveis. Este algo é uma representação matemática que recebe o nome função objetivo ou índice de performance. Mais especificamente resolver um problema de otimização, consiste em determinar uma solução ou conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções. Trata-se de uma ferramenta de grande aplicabilidade que constituem uma vasta e atraente área do conhecimento, sendo de grande importância não apenas para as ciências exatas, como também para áreas de biologia e tecnologia (OLIVEIRA,2012).

> "Na otimização podem ser utilizados os métodos exatos, que conduzem à solução ótima e os métodos heurísticos, que fornecem soluções quase ótima ou ótimas" (KOTSKO; STEINER; MACHADO,2003, p.2192).

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE RESULTADO

3.1 Apresentação e Análise dos Resultados

3.1.1 Análise da função quadrática utilizando software Geogebra

O uso de mídias tecnológicas como ferramenta de ensino, tem trazido uma maior possibilidade de ensino e aprendizagem e sobretudo, uma visão diferente da matemática, de modo que os alunos podem participarem de forma mais ativa no processo de ensino e aprendizagem.

Neste sentido, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática (DCE):

> "Os recursos tecnológicos como o software, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da Internet, entre outros, têm favorecido as experimentações matemáticas e potencializado formas de resolução de problemas." (PARANÁ, 2008, p.65).

Com o uso de tecnologia, o professor proporciona ao aluno um ambiente mais acolhedor, possibilitando a esses estudantes uma melhor assimilação dos conteúdos e permitindo também visualizar suas aplicações e seus significados.

> Atualmente, a escola tem que competir com muitos atrativos que estão ao alcance dos alunos. As tecnologias se renovam com muita rapidez, há uma grande facilidade ao acesso à informação, e, nesse sentido, é um desafio ao professor colocar tudo isso a seu serviço para tornar suas aulas mais interessantes e estimular a aprendizagem de seus alunos, tornando-os mais ativos nesse processo. Assim, espera-se que os professores acompanhem o desenvolvimento tecnológico, criando ambientes de aprendizagem que levem em conta as novas tecnologias da informação e da comunicação. (GOUVEA, 2006).

Para Borba e Penteado, na DCE (2008, p.66), as ferramentas tecnológicas auxiliam no processo ensino aprendizagem, uma vez que, propicia a,

> Estudantes e professores a visualizarem, generalizarem e representarem o fazer matemático de uma maneira passível de manipulação, pois permitem construção, interação, trabalho colaborativo, processos de descoberta de forma dinâmica e o confronto entre a teoria e a prática. As ferramentas tecnológicas são interfaces importantes no desenvolvimento de ações em Educação Matemática. Abordar atividades matemáticas com os recursos tecnológicos enfatiza um aspecto fundamental da disciplina, que é a experimentação. De posse dos recursos tecnológicos, os estudantes argumentam e

> conjecturam sobre as atividades com as quais se envolvem na experimentação. (BORBA & PENTEADO, 2001).

Criado por Markus Hohenwarter em 2001 para ser utilizado em qualquer ambiente, inclusive o ambiente de sala de aula - o Geogebra cujo nome é uma junção das palavras geometria e álgebra, trata-se de um software de matemática dinâmica que reúne recursos de Álgebra, Geometria e Cálculo.

Este software é um programa gratuito, de fácil instalação e manuseio. O recurso mais interessante neste software, é que ele permite que se faça uma interligação entre Álgebra e Geometria de forma que essa característica, permite que o ensino seja mais significativo e interativo, pois permite criar animações, construir gráficos, mover figuras, enfim, estabelecer uma conexão entre as áreas da matemática.

Albuquerque (2008, p.14), salienta que as principais possibilidades e potencialidades do GeoGebra se colocam no sentido de que, com este, é possível realizar construções com os entes matemáticos como os pontos, os vetores, os segmentos, as retas, as chamadas seções cônicas, dentre tantos outros, além de ser possível realizar um estudo aprofundado acerca das funções(compreendendo-a deste sua notação inicial até conceitos mais profundos como limites e derivadas que são de nível superior) com a característica de que estes podem ser modificados deforma dinâmica depois de dispostos no software.

As ferramentas do Software Geogebra, estão dispostas da seguinte forma:

- Ferramenta Mover
- Ferramenta de Pontos
- Ferramenta de Retas
- Ferramenta de Retas Especiais
- Ferramenta de Polígonos
- Ferramenta de Círculos e Arcos
- Ferramenta de Cônicas

- Ferramenta de Medida/Métrica
- Ferramenta de Transformação
- Ferramenta de Objetos Especiais
- Ferramenta de Objetos Dinâmicos
- Ferramentas Gerais
- Ferramentas Personalizadas

Assim que o Software Geogebra é aberto, encontramos duas janelas. À direita uma janela de geometria e à esquerda uma janela de álgebra, de modo que as duas janelas, podem ser utilizadas simultaneamente. podendo as duas ser utilizadas simultaneamente.

A janela de álgebra é subdividida em duas partes: “objetos livres” e 21 “objetos dependentes”, ou seja, para assim designar à dependência que uma variável tem da outra. A janela de visualização de geometria pode ser utilizada com ou sem malha quadriculada, com ou sem os eixos coordenados.

Como neste trabalho, dentre os objetivos, está a construção de gráficos de funções quadráticas que permitem a visualização da solução ótima do problema à partir do vértice da parábola, logo a seguir veremos a janela principal do Geogebra e uma descrição dos passos da construção do gráfico de uma função quadrática.

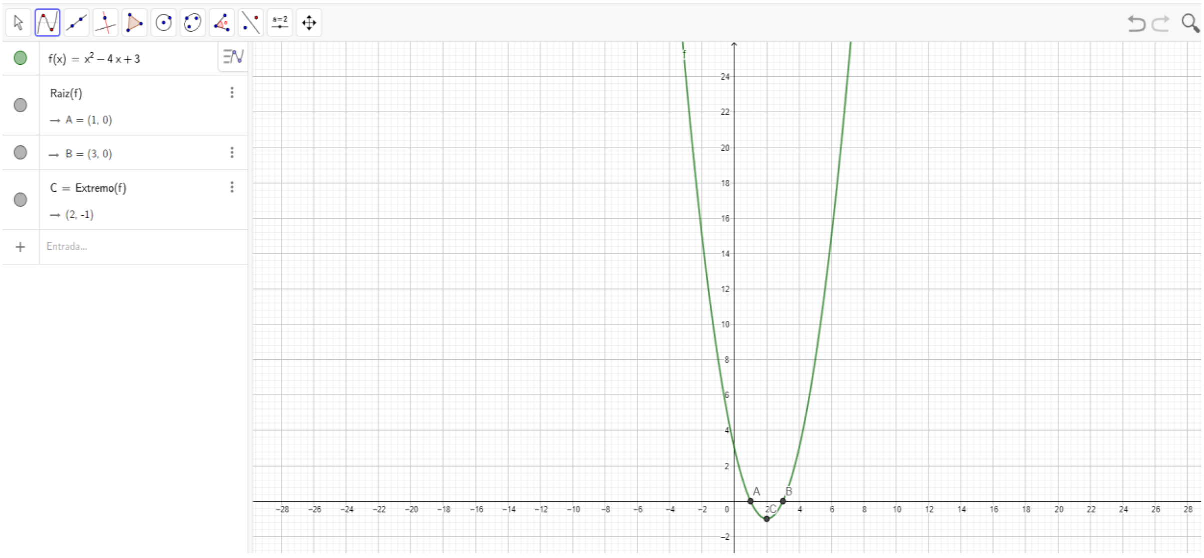
À fim de ilustração vamos considerar a função $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$.

Descrição dos passos:

- Abra o Geogebra.
- Na janela de visualização à direita, digite a equação quadrática.
- Após a construção do gráfico na janela de visualização à esquerda, clique no segundo ícone no canto superior esquerdo e vá no último rótulo (raízes) e clique em qualquer lugar sobre o gráfico. Esses pontos marcados no gráfico, irão aparecer automaticamente na janela de visualização à esquerda, com seus respectivos valores de x e y.

- Clicando no segundo ícone no canto superior esquerdo, no penúltimo rótulo (extremos/otimização), vamos determinar o vértice da parábola, bastando da mesma forma clicar em qualquer ponto do gráfico.

Gráfico 1



Fonte: autor (2022)

3.2 Definições e Problemas de Otimização

Consideremos dois conjuntos como, por exemplo, $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{3,5,7,13\}$. Vamos analisar alguns conjuntos de pares ordenados (x, y), como $x \in A$ e $y \in B$. Qualquer desses conjuntos é chamado relação de A em B.

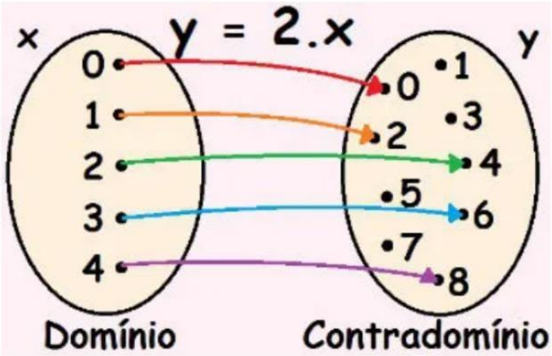
Quando, porém, a relação associar a cada elemento de A um único elemento de B, diremos que ela é uma função de A em B.

Definição 1. A **função** é uma relação entre dois conjuntos na qual há uma correspondência entre elementos de um conjunto A com elementos de um conjunto B. Para que essa relação entre o conjunto A e B seja uma **função**, cada elemento do conjunto A precisa ter um único correspondente no conjunto B.

Exemplo 1. Representar uma função de números naturais de forma que, para cada número natural escolhido, obtenha-se o seu dobro.

Por exemplo, ao escolher o natural 1, obtemos o natural 2; se escolhermos o 2, obtemos o 4; se escolhermos 3, é obtido o 6 e assim por diante. Podemos representar uma função utilizando o diagrama de flechas ou diagrama de setas, como na figura a seguir

Figura 1



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-funcao.htm

Nessa representação há dois conjuntos numéricos, o domínio e o contradomínio. Dentro do contradomínio há um subconjunto chamado de imagem. Esse subconjunto é composto pelos elementos que estão relacionados a algum elemento do domínio. Ao trabalharmos com funções, sempre teremos uma lei de formação que determinará como serão os elementos da imagem dessa função de y em relação a x, uma vez que, para cada x escolhido, existirá um y. Dizemos ainda que y é a variável dependente e, por sua vez, que x é a variável independente.

Se os elementos do domínio ($Dm(f)$) e da imagem ($Im(f)$) de uma função pertencem ao conjunto dos números inteiros, por exemplo, dizemos que f:$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, lemos que "$f$ é uma função cujo o domínio pertence aos inteiros e cuja imagem pertence aos inteiros ou, simplesmente, "f é uma função de inteiro em inteiros". As funções podem ser classificadas da seguinte forma:

Definição 2. Seja f uma função de A em B; diz-se**,** se e somente se $lm(f) =$ B. isto é: f é sobrejetora ⇔ $lm(f)$ = $CD(f)$.

Dizemos que uma função é sobrejetora se todos os elementos do contradomínio pertencem ao conjunto imagem, isto é, se todos os elementos "recebem uma seta vinda do domínio, ou, simplesmente, se o conjunto da imagem e do contradomínio são iguais". Um mesmo elemento do contradomínio pode receber uma correspondência de mais de um elemento do domínio.

Definição 3. Seja f uma função de A em B; f diz-se injetora se e somente se quaisquer que sejam os elementos x_1 e x_2 em A, então se$x_1 \neq x_2$ tem-se: f(x_1) ≠f(x_2), isto é:

f é **injetora**⇔ $(\forall x_{1,} x_2 \in$ A: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ f$(x_1) \neq$ f(x_2)

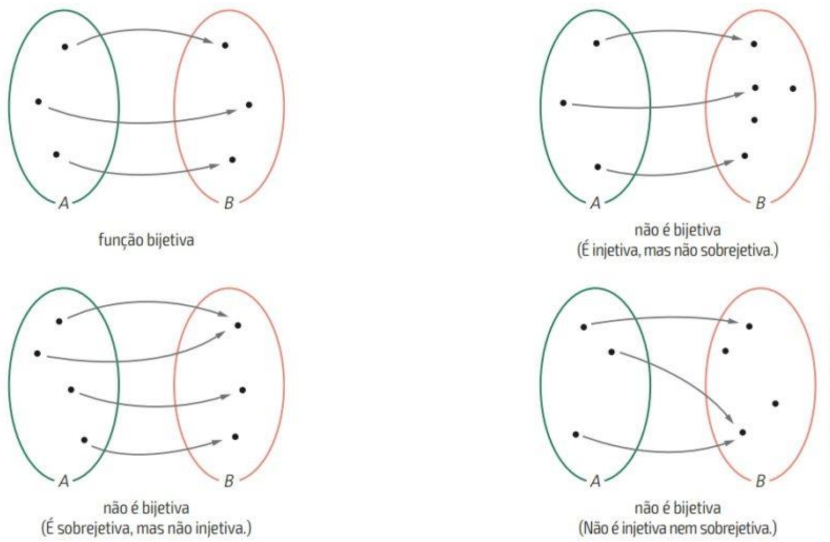
equivalente à $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Definição 4. Uma função é bijetora se ela for sobrejetora e injetora simultaneamente. Isto é, se todos os elementos do contradomínio pertencem ao conjunto da imagem e um elemento do contradomínio corresponde a um único elemento do domínio.

Definição 5. Uma função é dita simples se não for injetora nem sobrejetora.

No esquema a seguir há uma representação de cada tipo de função utilizando o diagrama de flechas:

Figura 2

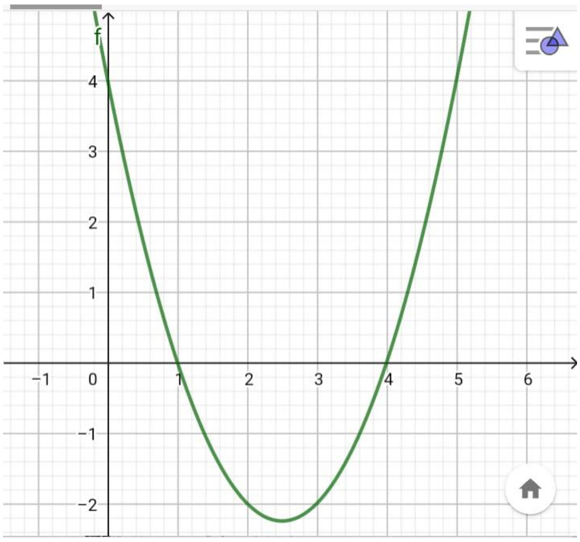


Fonte: https://www.todoestudo.com.br/matematica/funcao-bijetora

Definição 6. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$é dita quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ - $5x$ + 4 é quadrática onde $a = 1, b = \ -5\ e\ c = 4$.

Gráfico 2



Fonte: autor (2022)

Definição 7. Denominam-se **raízes ou zeros** da função quadrática $f(x) = ax^2$ $+bx$+c, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Dada a função quadrática$f(x) = ax^2$+bx+c o trinômio do segundo grau, podemos determinar sua forma canônica fazendo:

$$ax^2+\ bx + c = a\ [x^2+\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}]$$

Completando quadrado dentro dos colchetes obtemos:

$$ax^2+bx+c= a[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b2}{4a2}+\frac{c}{a}]= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Para determinar os zeros da função quadráticas façamos $f(x) = 0$. Assim,

$$ax^2+bx+c= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0$$

Como $a \neq 0$, devemos ter

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0,$$

Ou seja,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Extraindo a raiz dos dois lados,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

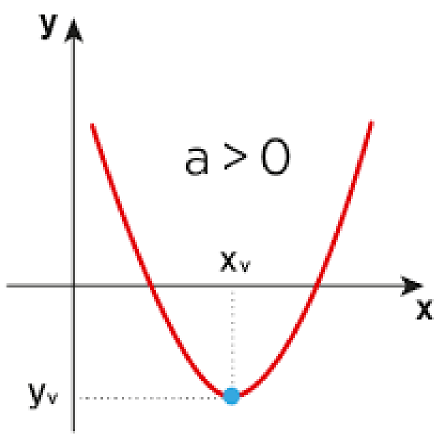
de onde,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chamamos, $\Delta = b^2 - 4ac$, que é conhecida como fórmula de Bháskara. Analisando o discriminante Δ, temos três casos a considerar com relação as raízes da função:

Se $\Delta > 0$ a função terá duas raízes reais distintas;

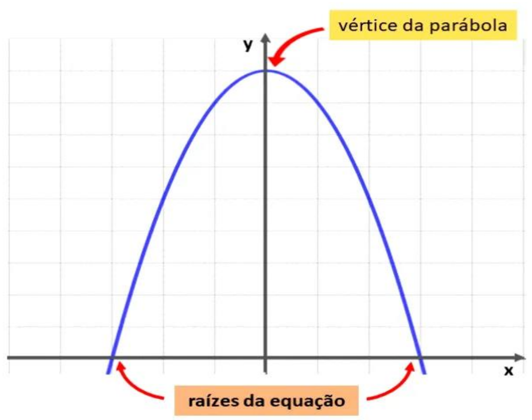
Gráfico 3



Fonte: https://www.pravaler.com.br/formula-de-bhaskara-o-que-e-e-como-usar/

Se $\Delta < 0$ a função não terá raízes real.

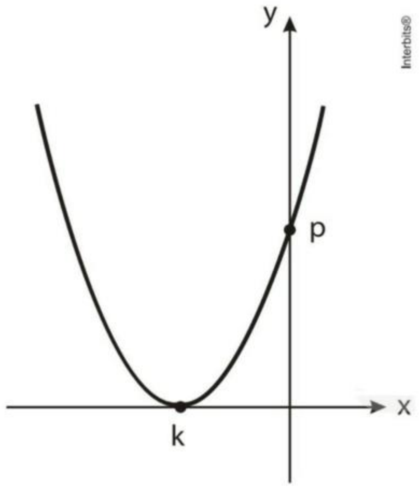
Gráfico 4



Fonte: https://www.todamateria.com.br/equacao-do-2-grau-exercicios/

Se $\Delta = 0$ a função terá apenas uma raiz real

Gráfico 5



Fonte: https://pir2.forumeiros.com/t181671-funcao-quadratica

Sejam x_1 e x_2 raízes reais de uma função quadrática. Pelo que foi deduzido, temos:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A soma e produto dessas raízes são dadas respectivamente por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

e

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

Portanto, a soma e o produto das raízes são dados por $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$, respectivamente. A equação $ax^2+bx+c = 0,$ com raízes x_1 e x_2 pode ser escrita da forma:

$$x^2 - sx + p = 0$$

De fato, como

$$ax^2 + bx + c = a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a.(x^2 - sx + p) = 0,$$

Logo $a = 0$ ou $x^2 - sx + p = 0$. Porém, por definição, $a \neq 0$. Logo $x^2 - sx + p = 0$.

Agora, mostraremos que a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com raízes reais x_1 e x_2, pode ser escrita na forma fatorada $y = a.(x - x_1).(x - x_2)$. De fato,

$$y = ax^2 + bx + c = a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Sabemos que a forma cônica do trinômio do segundo grau é dado por

$$y = ax^2 + bx + c = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Seja $\Delta = b^2 - 4ac$ e suponha $a > 0$. então, o valor mínimo de y deve ocorrer quando se tem o valor mínimo para expressão

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Sendo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ sempre maior ou igual a zero, segue que seu valor mínimo deve ocorrer quando

$$x + b/2a = 0$$

ou seja, quando

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Logo, o valor mínimo de y é dado por

$$y = a.\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Neste caso, quando $a < 0$, a função é limitada superiormente. Em ambos os casos, o vértice da parábola e dado por:

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, \frac{-\Delta}{\boldsymbol{4a}}\right)$$

Representa as coordenadas do vértice da parábola.

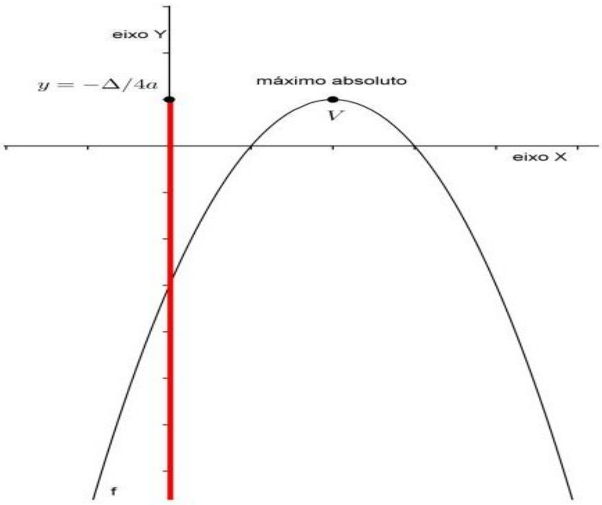
Ou seja,

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

Discutiremos a seguir o gráfico de uma função quadrática, o qual é uma parábola, e seus principais elementos.

Seja f uma função quadrática. O seu gráfico é uma curva denominada parábola. Com respeito ao valor da constante a temos dois casos a considerar:

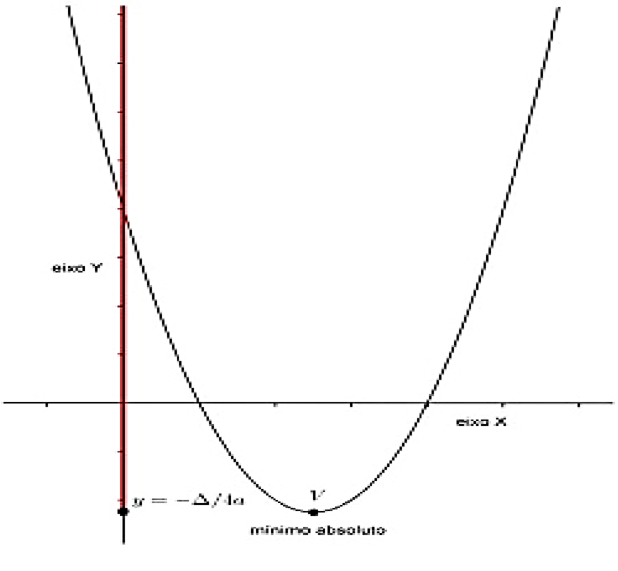
Gráfico 6



Fonte:https://repositorio.ifgoiano.edu.br

a) Se $a > 0$ então a parábola é côncava para cima e nesse caso o gráfico terá um ponto de mínimo absoluto, sendo limitada inferiormente. O conjunto imagem é

Gráfico 7



Fonte:https://brainly.com.br/tarefa/33850523

$$lm(f) = \{y \in \mathbb{R}/\ y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$$

b) Se $a < 0$ então a parábola é côncava para cima e nesse caso o gráfico terá um ponto de mínimo absoluto, sendo limitada inferiormente. O conjunto imagem é

$$lm(f) = \left\{y \in \mathbb{R}/\ y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplo3. Dada a função $y = x^2 - 2x - 3$, pede – se:

a) O vértice
b) O gráfico

Solução:

a) $$x_v = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-2}{2.1}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

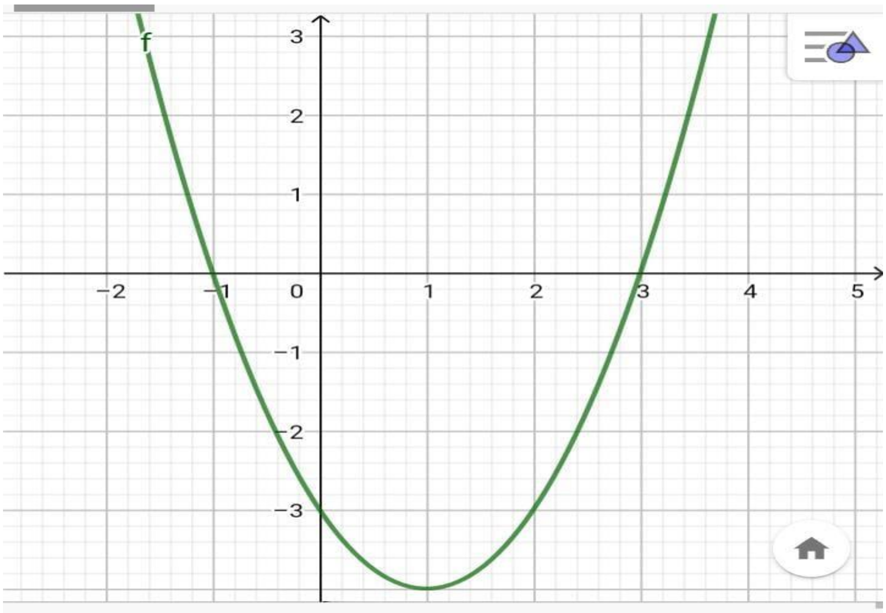
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4.a} = \frac{-16}{4.1} = -4$$

Logo, o vértice é $V = (1, -4)$.

Utilizando o software Geogebra, representamos abaixo o gráfico.

Gráfico 8



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 4. Uma empresa de caminhoneiros, alugou um salão de eventos para realizar sua festa de final de ano, com capacidade de 210 pessoas.

Cada caminhoneiro comprometeu-se, de início, a pagar 8,00. Caso a lotação do salão de festa não fosse atingida, o gerente que fez negociação, propôs que cada caminhoneiro que comparecesse pagasse um adicional de 2,00por lugar vazio. Qual deve ser a quantidade de caminhoneiros presentes à festa de final de ano para que a receita seja máxima?

Solução

Seja x= n de caminhoneiros. A função receita, é definida por:

R=$x\big(8+2(210-x)\big)$

R=$8x+420x-2x^2$

R=$-2x^2$+$428x$

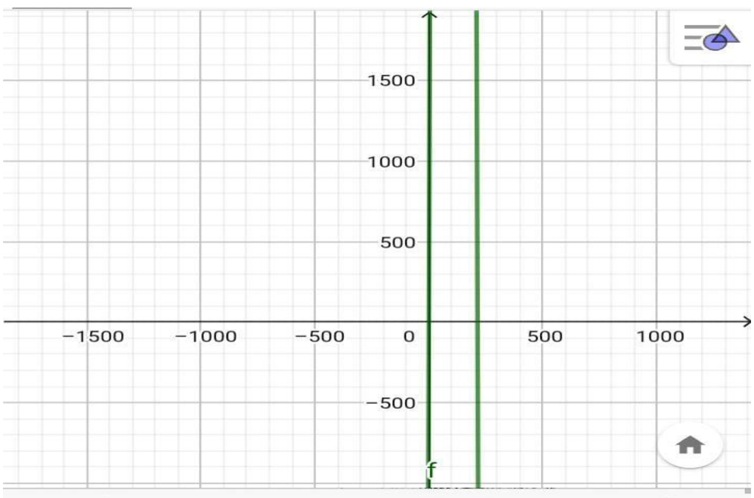
Podemos verificar que R(x) é uma função do 2°grau com coeficiente $a < 0$, de onde podemos concluir que iremos determinar um ponto de Máximo.

Calculando o x do vértice, obtemos

x_v=$\frac{-b}{2a}=\frac{-428}{2(-2)}=\frac{428}{4}=107$

Portanto o n de caminhoneiros presente a festa de confraternização para que a receita seja máxima são 107 caminhoneiros.

Gráfico 9



Fonte: Autor (2022)

De acordo com a equação da receita, obtenha-se as informações para elaboração do gráfico. $a < 0$ ('A' menor que zero) significa que a concavidade é voltada para baixo, como $\Delta > 0$ (delta é maior que zero) a parábola corta o eixo das abcissa em dois pontos distintos.

Exemplo 5. Um fazendeiro dispõe de 220m de cerca a fim de construir três currais. Sabendo que dois deles são quadrados e o outro é retângulo com comprimento igual ao dobro da largura, qual deverá ser a área do curral retangular, para que a soma da área dos currais seja a menor possível?

Solução:

Considerando que x seja a medida do lado dos dois quadrados, restarão então $(220 - 8x)$ metros de construir o curral retangular. Queremos minimizar a soma da área dos currais sendo y a medida da largura do curral retangular, teremos o comprimento igual a $2y$ e portanto,

$$2y + 2(2y) = 220 - 8x$$

$$6y = 220 - 8x$$

$$y = \frac{220 - 8x}{6} = \frac{110 - 4x}{3}$$

Portanto, a função $A(X)$ que determina a soma de área dos currais é dado por:

$A(X)$=x^2+$x + 3y^2$

$$A(X) = 2x^2 + 3\left(\frac{110 - 4x}{3}\right)^2$$

$$A(X) = 2x^2 + \frac{3}{9}(1200 - 880x + 16x^2)$$

$$A(X) = 2x^2 + \frac{36300 - 2640 + 48x^2}{9}$$

$$A(X) = \frac{18x^2 + 36300 - 2640x + 48x^2}{9}$$

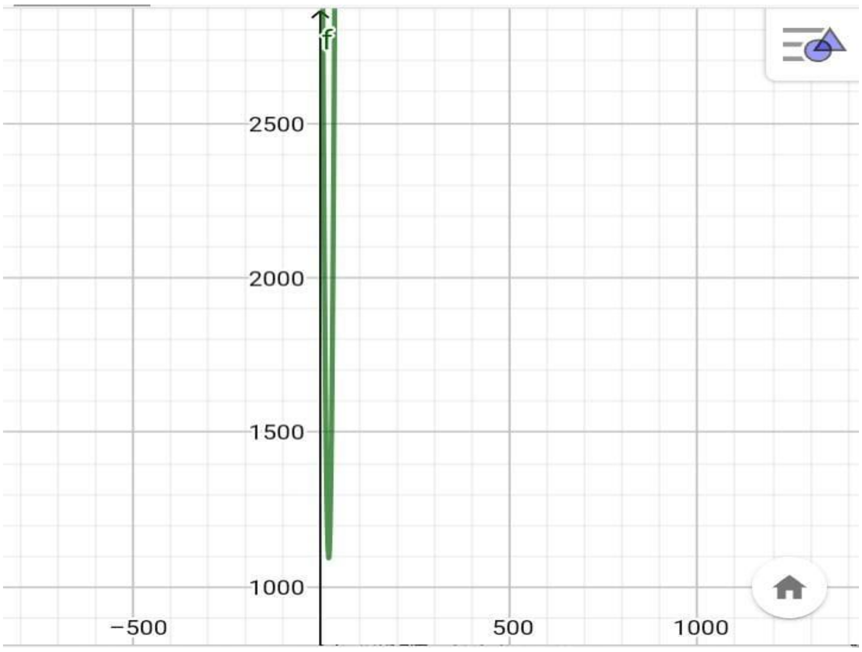
$$A(X) = \frac{66x^2 - 2640x + 36300}{9}$$

Calculando

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{2640}{9}}{\frac{2.66}{9}} = \frac{2640}{9} \cdot \frac{9}{132} = 20$$

Portanto, a função é mínima quando $x = 20m$. logo a área do curral retangular é $200m^2$.

Gráfico 10

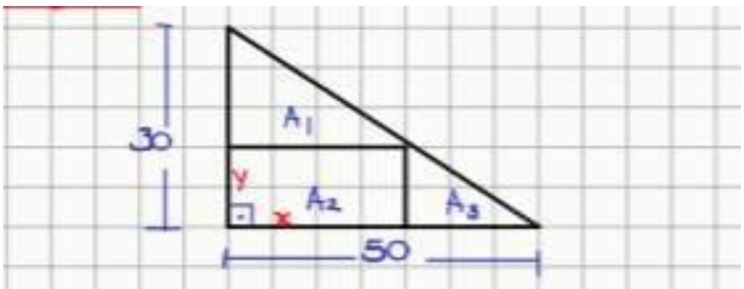


Fonte: Autor (2022)

Exemplo 6. Ao comprar um lote para construir sua casa, um proprietário escolheu um terreno onde pudesse construir também uma edícula para guarda suas ferramentas. o terreno tinha o formato de um triangulo, cuja medição dos catetos 30m e 50m. determine as dimensões da edícula quadrangular que será construída no lote, de modo que sua área seja máxima.

Solução:

Figura 3



Fonte: Autor (2022)

Pela figura:

$$A_1 = x\left(\frac{30 - y}{2}\right)$$

$$A_2 = x.y$$

$$A_3 = \left(\frac{50 - x}{2}\right)y$$

Temos ainda que A_T=$A_1 + A_2 + A_3$; A_T=$\frac{50.30}{2}$=$750m^2$

$$750 = 15x - \frac{xy}{2} + xy + 25y - \frac{xy}{2}$$

$$750 = 15x + 25y$$

$$y = 30 - \frac{3x}{5}$$

Substituindo na equação $A = xy$

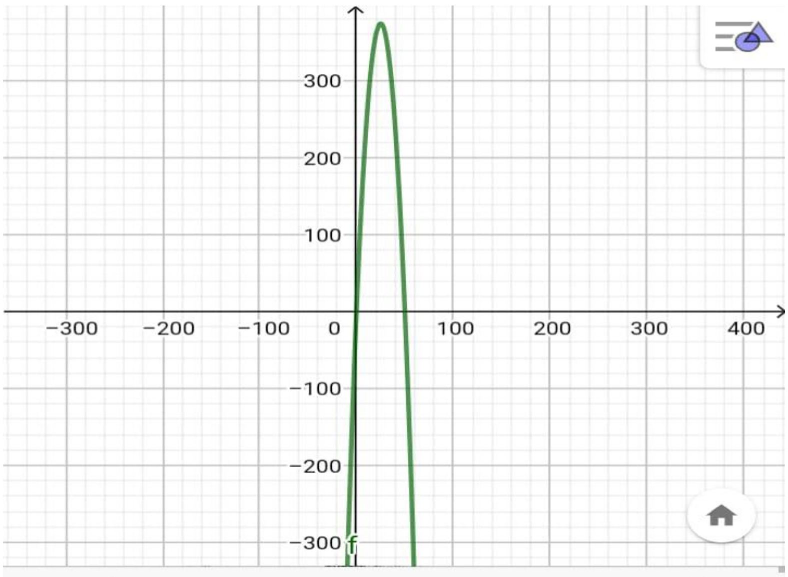
$$A = x\left(30 - \frac{3x}{5}\right) = 30x - \frac{3x^2}{5}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{\frac{-6}{5}} = 5m$$

Como $y = 30 - \frac{3x}{5} = 30 - \frac{3.5}{5}$=$27m$

Portanto as dimensões são $x = 5m \; e \; y = 27m$.

Gráfico 11



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 7. Deseja-se desenhar duas figuras, sendo uma na forma circular e a outra na forma de um quadrado. Para isso, dispomos de 16m de um arame que será cortado em duas partes. Devemos dividir esse arame, de tal maneira que a área combinada das duas figuras seja a menor possível.

Solução:

Se o pedaço que será usado na forma circular é x, então $16 - x$ será o pedaço de arame utilizado para o quadrado.

Temos que o comprimento de circunferência é dado por $2\pi r$, enquanto o perímetro do quadrado é $4l$, onde l representa o lado do quadrado . Portanto:

$$\begin{cases} 2\pi r = x \\ 4l = 16 - x \end{cases} \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \ e \ l = \frac{16 - x}{4}$$

Sendo A a soma das áreas, então

A=$\pi r^2 + l^2$

A=$\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$+$\left(\frac{16-x}{4}\right)^2$

A=$\frac{\pi.x^2}{4\pi^2}$+$\left(4 - \frac{x}{4}\right)^2$

A=$\frac{(4+\pi)x^2 - 32\pi x + 256\pi}{16\pi}$

Portanto:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{32\pi}{16\pi} . \frac{16\pi}{2(4+\pi)}$

$$x_v = \frac{16\pi}{4 + \pi}$$

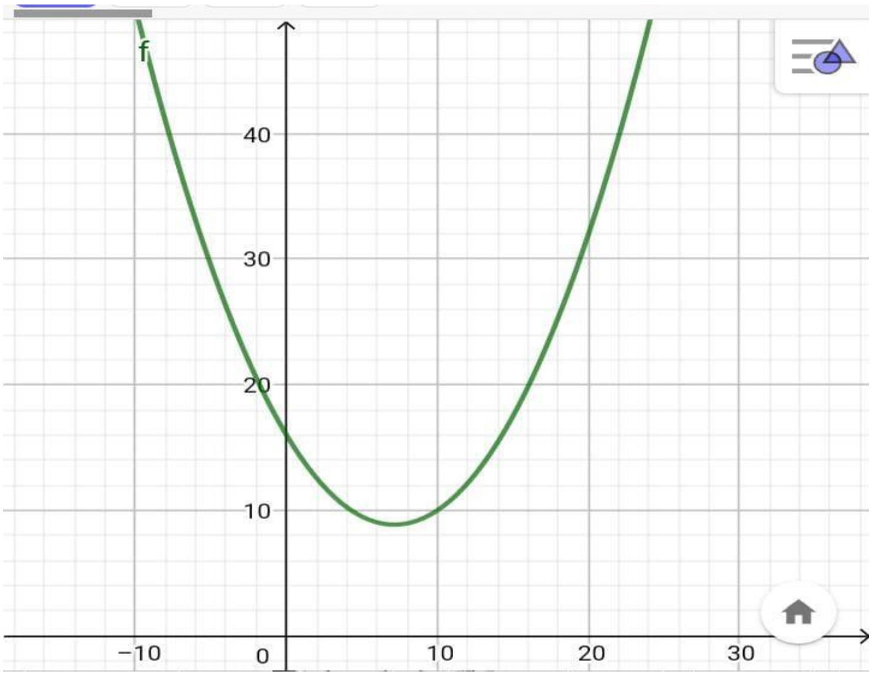
Como r =$\frac{x}{2\pi}$=$\frac{\frac{16\pi}{4+\pi}}{2\pi}$=$\frac{8}{4+\pi}$

$$l = \frac{16 - x}{4} = \frac{16 - \frac{16\pi}{4+\pi}}{4} = 64 + \frac{\frac{16\pi - 16\pi}{4+\pi}}{4} = \frac{64}{16 + 4\pi}$$

Portanto, para que a área seja a menor possível deve-se ter:

$$r = \frac{8}{4 + \pi} \ e \ l = \frac{64}{16 + 16\pi}$$

Gráfico 12



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 8. Determine dois números $a \; e \; b$ tais que a diferença entre eles seja 75e o produto seja o menor possível.

Solução:

Temos

$$\begin{cases} a - b = 75 \\ p = ab \end{cases}$$

Manipulando o produto entre eles temos:$b = a - 75$ substituindo $p = a(a - 75)$

$$p = a^2 - 75a$$

Temos: a_v=$\frac{-b}{2a}$=$\frac{75}{2}$ $= 37{,}5$

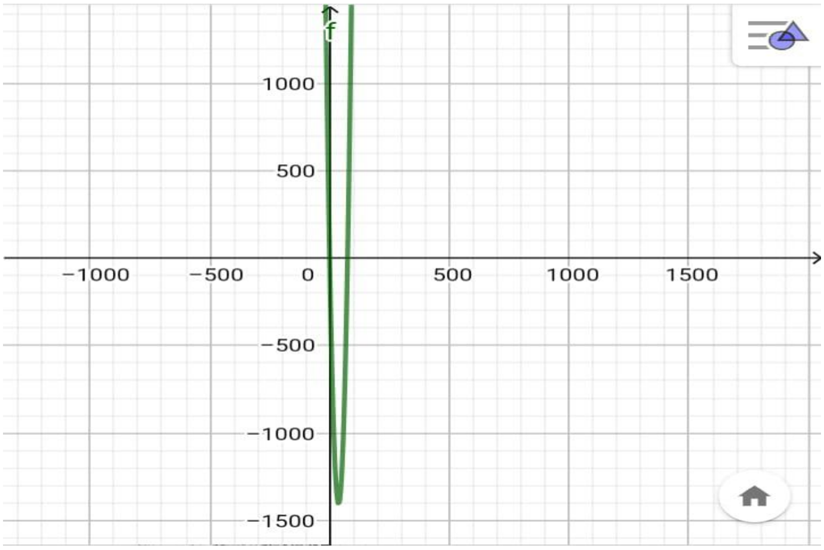
Como $b = a - 75$

$$b = 37{,}5 - 75 = 37{,}5$$

Portanto os n procurados são $a = 37{,}5 \; e \; b = 37$.

Utilizaremos agora o conhecimento do cálculo da distância entre dois pontos para determinar a menor distância entre a curva e um ponto fixado, sem que seja necessário, conhecimento prévio de geometria analítica.

Gráfico 13



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 9: Determine o ponto sobre a reta $y = 5x + 7$ que está mais próximo da origem.

Solução: O objetivo é determinar a menor distância entre um ponto da reta $y = 5x + 7$ e a origem (0,0). A função distância entre dois pontos, é dado por:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ sendo, $((x_1, y_1) = (0,0)\ e\ (x_2, y_2) = (x, y)$,

Portanto,

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Sem perda de generalidade $d^2 = x^2 + y^2$. Substituindo $y = 5x + 7$, na equação d^2 obtemos:

$$d^2 = x^2 + (5x + 7)^2$$

$$d^2 = x^2 + 25x^2 + 70x + 49$$

$$d^2 = 26x^2 + 70x + 49$$

Logo, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-70}{52} = \frac{-35}{26}$

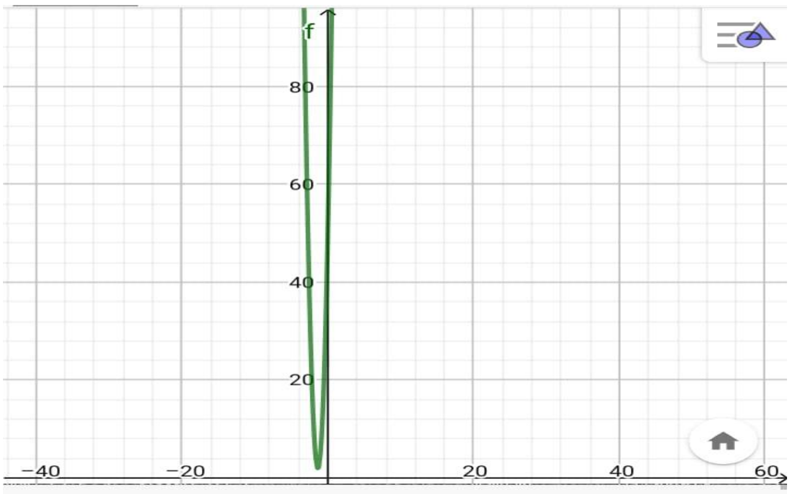
Substituindo $x = \frac{-35}{26}$ em $y = 5x + 7$.

Obtemos: $5.\left(\frac{-35}{26}\right) + 7 = \frac{-175}{26} + 7 = \frac{-175+182}{26} = \frac{7}{26}$

Observamos que o mínimo da função $d(x)$ é o mesmo que encontrar os mínimos da função $d^2(x)$

Portanto, o ponto desejado é $\left(\frac{-35}{26}, \frac{7}{26}\right)$.

Gráfico 14



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 10. Mostre que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o quadrado é de área máxima.

Solução:

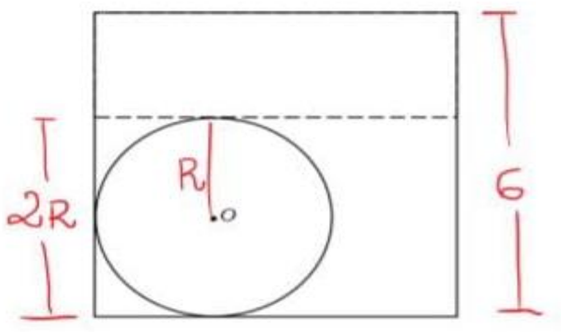
Sendo R um retângulo de dimensões $x\ e\ y$ seu perímetro é $p = 2x + 2y$ e a sua área é $A = xy$. Daí

$$p = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{p-2x}{2}\ e, A = xy \Rightarrow A(x) = x.\left(\frac{p-2x}{2}\right) = \frac{-2x^2+px}{2} = -x^2 + \frac{p}{2}x.$$

Observe que trata-se de uma função quadrática em que o coeficiente do termo quadrático é negativo, logo o Maximo valor desta função ocorre em $-b/_{2a}$ .Como neste caso $b = p/_{2}\ \ e\ a = 1$ tem – se que $x = p/_{4}$ é o ponto Máximo de $A(x)$, ou seja a área será máxima quando o retângulo for um quadrado.

Exemplo 11. Um quadrado de $6m$ de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados oposto, conforme a figura a seguir:

Figura 4



Fonte: Autor (2022)

a) Escreva uma expressão que represente a soma das área de um círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior a menor possível?

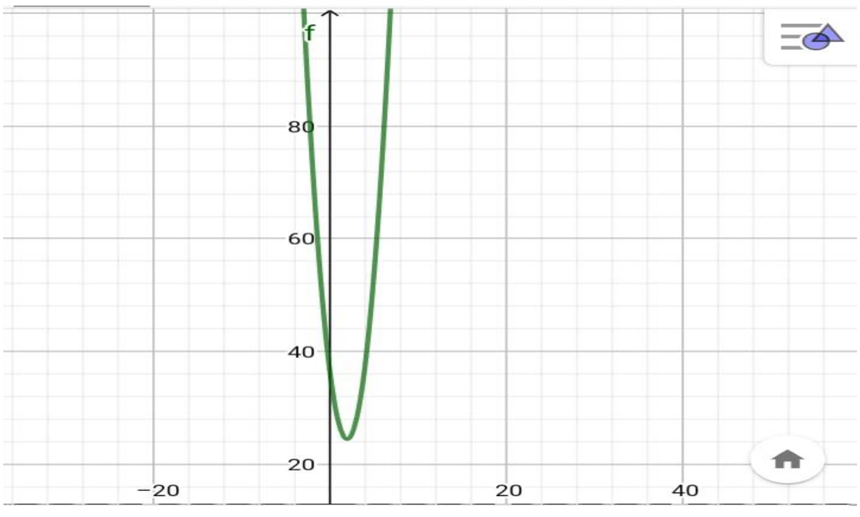
a) $A = \pi . R^2 + (6 - 2R)6$

$$A = \pi R^2 + 36 - 12R$$

b) Como o item (a) foi obtida uma função quadrática em função de R,onde o coeficiente do termo quadrático é positivo, a mesma admite o ponto de mínimo que ocorre quando

$x = \frac{12}{6\pi} = \frac{6}{\pi}$.

Gráfico 15



Fonte: Autor (2022)

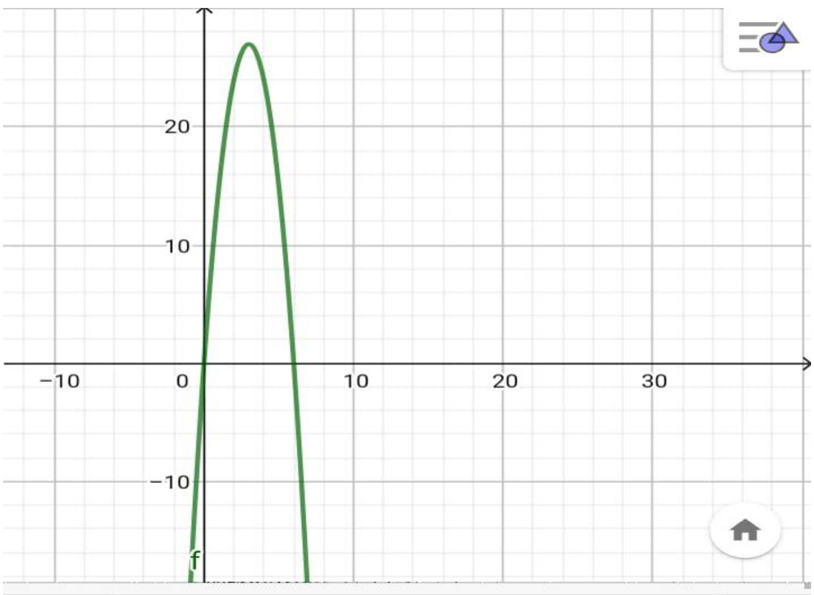
Exemplo 12. A potência elétrica de um circuito por um gerador é expressa por P= $18i - 3i^2$(SI), onde i é a intensidade da corrente elétrica. Calcule a intensidade da corrente elétrica necessária para obter a potência máxima do gerador.

Solução:

Observe que a função P é uma função quadrática com $a < 0$, portanto seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Logo, para calcular a intensidade da corrente elétrica e obter o valor Máximo, basta calcular a abscissa do vértice do gráfico da função, ou seja,

$$i_{máximo} = \frac{-b}{2a}.$$

Gráfico 16



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 13. Usando cálculo e física, podemos provar que, sob certas condições, considerando somente o efeito da gravidade e desprezando-se a resistência exercida pelo ar), se um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em $m/_s$, é possível mostrar que sua altura s, t segundos após o lançamento, é dado por

$$s(t) = -5t^2 + v_0.t + s_0$$

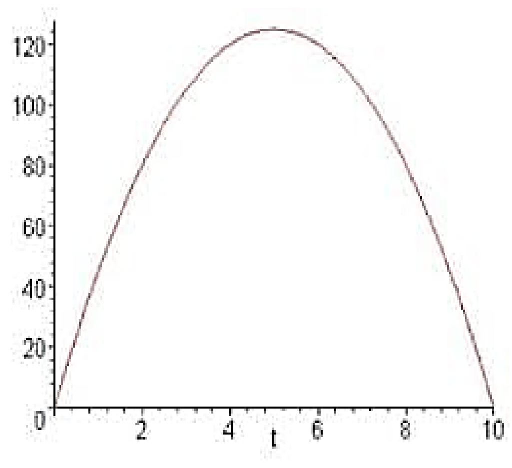
a) Sabendo que um projétil é lançado do solo (e portanto, s_0 = 0) e que leva 10 segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinara velocidade inicial do projétil?
b) Qual a altura máxima que o projétil atinge?

Solução:

a) A função $s(t) = -5t^2 + v_0.t + s_0$ fornece a altura do projétil para cada instante de tempo t. sabemos que s_0=0 e como o projétil leva 10 segundos para retornar ao solotemos que $s(10) = 0$. Substituindo estes valores na equação dada obtemos $-500 + 10v_0 = 0$. Resolvendo esta equação para v_0, temos que $v_0 = 50\ {}^{m}/_{s}$.

b) Usando o valor para v_0, obtido no item anterior, a equação que modela o movimento se transforma em $s(t) = -5t^2 + 50t$, que é uma parábola cujo vértice se localiza $V(5{,}125)$. Este vértice é um ponto de Máximo da função pois, como $a = -5 < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo. Deste modo, o projétil atinge a altura máxima em 5 segundos e esta altura é igual a 125m. veja a baixo o gráfico da altura atingida pelo projétil em função do tempo transcorrido.

Gráfico 17



Fonte: Autor (2022)

Exemplo 14. O custo para produzir um certo produto é 3 unidades monetárias. Se esse produto for vendido ao preço de 6 unidades monetárias, são vendidas mensalmentes, 3000 unidades do produto. O empresário, por experiência própria, vem observando o seguinte: quando aumenta o preço de uma unidade monetária, vende 250 unidades a menos mensalmente. O empresário deseja saber:

1) Qual o maior preço que deverá cobrar, a fim de obter a máxima receira?

2) Quantas unidades deverá produzir, mensalmente, a fim de obter a máxima receita?

3) Qual o maior preço que deverá cobrar, a fim de obter o máximo lucro?

4) Quantas unidades deverá produzir, mensalmente, a fim de que obtenha o máximo lucro?

Solução:

Tomando q= a quantidade vendida mensalmente. Se o preço se o preço passar de 6 para 7 u.m., então:

Q= 3000- 250.(7- 6)= 3000- 250(a quantidade cai de 250). Se o preço passar de 6 para 8u.m., então,

Q=3000- 250(8 - 6)= 3000- 500(a quantidade cai de 500). E assim por diante.

Se em dado momento o preço for p, então: q= 3000 – 250(p – 6)=3000 – 250p+ 1500= -250p+ 4500 como a receita total R_T é igual ao preço vezes a quantidade, logo, R_T= p.q.

Multiplicando ambos os menbros por p, obtemos: p.q = p(-250p + 4500)= $-250p^2 + 4500p$.

A equação acima é a receita total ou função receita total da empresa.

1) Sendo a equação do 2° grau, logo o seu gráfico é uma parábola. Como o coeficiênte de x^2 é negativo, então, a receita total atinge o máximo no vértice da parábola. Como o vértice da parabola é dado por $x_V = \frac{-b}{2a}$ e como a = -250 e b= 4500, logo: $x_V = \frac{-4500}{-500}$ = 9.Portanto, x = 9 . logo o maior preço que a empresa deverá cobrar a fim de obter a máxima receita é 9/u.m. E para esse preço, o valor máximo da receita total é;$R_T = -250.9^2 + 4500(9) = 20250$/u.m.

2) Q= -250.9 + 4500=2250 unidades. Assim, a fim de obter a maxima receita, a empresa deverá produzir e vender 2250 unidades.

3) Como o lucro total é igual à diferença entre a receita total e o custo total C_T, logo $L_T= R_T - C_T$. Sendo que a empresa gasta 3/u.m. para produzir cada unidade do produto, o custo total é $C_T = 3Q$. como Q= -250P+4500, então, C_T = 3(-250P + 4500) =- 750P+ 13500 a equação anterior é a equação do custo total ou função custo total da empresa. Assim $L_T = R_T - C_T$, então, $L_T = -250P^2 + 5250P - 13500$.

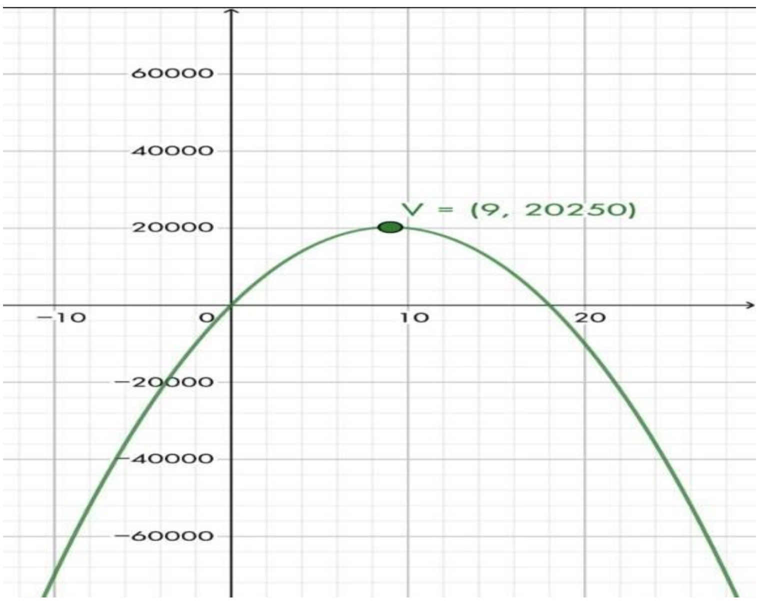
Pela equação L_T, temos a= - 250 e b= 5250, logo: $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-5250}{2.250}$=10,5. Portanto o maior preço que a empresa deverá cobrar, a fim de obter o máximo lucro, é de 10,5 u.m. e para esse preço o valor máximo do lucro total é : $L_T = -250(10,5)^2 + 5250(250) - 13500 = 14062,50$/u.m.

4) Q=-250(10.5) + 4500 =1875 unidades

- Construção do grafico da receita total utilizando o software Geogebra.

$R_T = -250P^2 + 4500P$

Gráfico 18



Fonte: Autor (2022)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho consiste em uma contribuição para o Ensino Médio, onde mostra que é possível aplicar as equações quadráticas em problemas que permeiam o nosso dia a dia. Esses problemas são conhecidos como problemas de otimização, ou seja, problemas que visam uma melhoria nos resultados obtidos em várias situações que de certa forma, podemos determinar o melhor caminho, seja ele para aumentar um lucro, diminuir o tempo de percurso, minimizar os gastos, entre outros.

A maior expectativa é que este trabalho, possa servir como referência ou apoio na construção de uma sequência didática inovadora e eficiente para a utilização de problemas de otimização em turmas do Ensino Médio. Aplicar as equações quadráticos nestes problemas, permite trabalhar a interdiciplinaridade, abrindo novos horizontes e incentivando os alunos à tomarem gosto pela disciplina, uma vez que conseguem ver sua aplicação. Ressalta-se ainda, que a ponte entre a solução algébrica e a solução geométrica, possível neste trabalho, com a utilização do Software Geogebra, é ainda um forte aliado, uma vez que evidência a veracidade do resultado obtido algebricamente.

Espera-se ainda, que este trabalho possa contribuir como um exemplo de como é possível despertar o interesse dos alunos e motivá-los à partir de uma mudança na abordagem de um determinado conteúdo. Portanto, este trabalho, poderá servir como reflexão por parte dos professores que desejam levar para sala de aula uma proposta pedagógica capaz de enriquecer o ensino da Matemática, através de atividades que possam proporcionar um ensino mais significativo e contextualizado onde o professor criará “condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante deste conhecimento” (BRASIL, 1988, p.42).

Apesar de não termos resultados advindos de atividades desenvolvidas em sala de aula, acreditamos na sua real eficácia como meio de uma aprendizagem mais significativa aos alunos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E**.Matemática**/Edwaldo Bianchini – 7Ed.- São Paulo: Moderna,2011.

CARL.B. Boyer **História da Matemática**, Editora Edigard Blucher LTDA,1974.

DANTE, LR**. MATEMÁTICA: contexto e aplicações.** 1.Ed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. 2 ed. São Paulo: Ática,2010.

EVES, Howard**. Introdução à História da matemática**. São Paulo, Editora da Unicamp,2004.

GUELLI, O**. Contando a História da Matemática**: História da Equação do 2°grau. 5ed. São Paulo: Ática,1995.

LIRA, Bruno Carneiro. **O passo a passo do trabalho científico**. 2. Ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

SILVEIRA, E**. Matemática: Compreensão e prática**/ Ênio Silveira. – 3. Ed.- São Paulo: Moderna, 2015.

VASCONCELOS, Laércio**. O ALGEBRISTA VOLUME 1**. Rio de janeiro:LVC, 2016.

https://prezi.com/jvirjbprxy_c/historia-da-funcao-quadratica.