UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCISCO BRENO DE SOUZA MELGUEIRO

ASPECTOS ARITMÉTICOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

MANAUS, MARÇO

2022

FRANCISCO BRENO DE SOUZA MELGUEIRO

ASPECTOS ARITMÉTICOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Almir Cunha da Graça Neto

MANAUS, MARÇO

2022

AMAZONAS
GOVERNO DO ESTADO

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **FRANCISCO BRENO DE SOUZA MELGUEIRO.**

Em 17 de maio de 2022, às 19:20h, na sala Benito D'Antona na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. Almir Cunha da Graça Neto, Me. Geraldine Silveira Lima e Me. Edson Lopes de Souza, o(a) aluno(a) **FRANCISCO BRENO DE SOUZA MELGUEIRO** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "**Aspectos Aritméticos da sequência de Fibonacci.**" A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela aprovação do referido trabalho, com o conceito 9,8 divulgando o resultado ào aluno e demais presentes.

Presidente da Banca Examinadora

Orientador (a)

Geraldine S. Lima
Avaliador 1

Edson Lopes de Souza
Avaliador 2

Francisco Breno de S. Melgueiro.
Aluno

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Esta pesquisa foi elaborada com o objetivo de utilizar meios aritméticos para se estudar, e provar propriedades da sequência de Fibonacci, propriedades essas, que foram descritas ao longo do tempo por matemáticos do mundo todo. Será dado enfoque ao contexto histórico para que se possa compreender de onde surgiu tal sequência apresentada, e também à teoria aritmética dos números, para que assim se efetivasse a proposta sugerida. Não menos importante, dedicaremos também uma seção ao matemático Édouard Lucas, que foi responsável pela popularização da sequência Fibonacci tendo hoje, como homenagem, sua própria sequência que, como veremos no decorrer deste trabalho, está diretamente relacionada com a sequência de Fibonacci. Para a fundamentação desta pesquisa, buscamos livros, artigos, publicações de pós graduação, e os principais autores são; Bruno A. e Silva, Edgard de A. Filho, Thomas Koshy, e Kenneth H. Rosen.

Palavras-Chave: Teoria dos números. Sequência de Fibonacci. Sequência de Lucas.

Sumário

INTRODUÇÃO

Em 1202 Leonardo de Pisa (c. 1170 - c. 1250), importante matemático Italiano, conhecido como Fibonacci, publicou seu livro, intitulado "*Liber Abaci*", no qual introduzia o conhecimento sobre o sistema de numeração hindu – arábico na Europa.

Além de discutir aritmética e álgebra, em sua obra, Leonardo Fibonacci propõe alguns problemas, em que se destaca o interessante problema sobre reprodução de coelhos, nele, trata a respeito do crescimento populacional hipotético de coelhos (SILVA, 2017).

A análise realizada a partir desse problema culminou no que se conhece hoje como Sequência de Fibonacci, denominada assim pelo matemático francês Édouard Lucas (1842 – 1891) como aponta os estudos realizados por Koshy (2001). A Sequência de Fibonacci foi estudada por muitos matemáticos ao longo da história, com isso, conjecturas foram fundamentadas, e algumas propriedades aritméticas descritas.

Esta pesquisa visa contribuir com a formação de estudantes da graduação em Matemática, podendo ser usada como ferramenta de suporte para compreensão de sequências de números inteiros e estudos mais específicos envolvendo teoria aritmética dos números.

O presente estudo possui como objetivo geral; demonstrar por meio da teoria dos números, algumas propriedades aritméticas da sequência de Fibonacci. Como objetivos específicos, propõe-se; mostrar algumas ferramentas matemáticas da teoria dos números que permitem demonstrações de relações existentes entre os inteiros. Outro objetivo é; descrever as propriedades da sequência de Fibonacci e por fim, determinar relações existentes entre os termos da sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas.

No capítulo 1 apresenta-se o contexto histórico que levou a conjectura da sequência de Fibonacci, posteriormente será mostrado conceitos da teoria aritmética dos números que serão o aporte para a aplicação na sequência estudada.

O capítulo 2 traz as propriedades que regem a sequência de Fibonacci, neste capítulo poderemos ver a aplicação do algoritmo de Euclides, utilização dos conceitos de divisibilidade, tudo por meio de demonstrações das propriedades descritas neste capítulo.

O capítulo 3 é dedicado ao matemático Édouard Lucas, já que foi ele quem popularizou a sequência de Fibonacci e fez grandes estudos relacionado a sequência, tanto que hoje há uma que carrega seu nome, e com isso, será mostrado que existem relações entre os termos das sequências de Fibonacci e de Lucas.

Capítulo 1

1.1 Aspectos Históricos – Leonardo Fibonacci.

Leonardo Fibonacci foi um icônico matemático italiano da idade média, Filho de Guglielmo Bonacci representante financeiro de Pisa, viveu parte de sua juventude no norte da África e acumulou conhecimento sobre aritmética e álgebra durante suas viagens à Constantinopla, França, Roma, Síria e Egito, viagens essas provenientes da sua vida mercantil (POSAMANTIER; LEHMANN, 2007). Dedicou-se ao estudo do sistema de numeração árabe, pois tomou ciência da superioridade do sistema hindu-arábico em relação ao sistema de numeração romana então utilizada na Itália. Ao retornar para a cidade de Pisa, Fibonacci publicou o livro "*Liber Abaci*" (O livro do cálculo ou O livro do Ábaco), com o intuito de divulgar os algarismos hindus-arábicos pela Europa, Koshy (2001, p.1 e 2) argumenta que: "Na verdade, Fibonacci demostrou neste livro o poder do sistema hindu-arábico de forma mais vigorosa do que em qualquer outro trabalho matemático até aquele momento".

Em seu livro "*Liber Abaci"*, Fibonacci apresentou as nove figuras hindus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e também a figura 0, chamada pelos hindus de "zephyrum". Escreveu sobre conteúdos de Aritmética e Álgebra elementar, além de diversas situações problemas que retratavam até mesmo situações do cotidiano, dentre os mais diversos problemas propostos, destaca-se o famoso problema com coelhos.

Embora muito renomado na Matemática mas pouco conhecido por suas obras, Fibonacci contribuiu com estudos sobre amplas áreas da Matemática, deixando algumas obras como legado, publicado em 1220 o livro "Practica Geometriae" (Prática da Geometria), o livro "Flos" (Flor ou Florescer) datada de 1225 juntamente com o livro "Liber Quadratorum" (O livro dos números quadrados), obras majestosas estas escritas por Leonardo Fibonacci, o que lhe deu mérito a ser considerado um renomado teórico dos números (EVES, 2011).

1.2 O problema com coelhos.[1]

Proposto por Fibonacci, o problema envolvendo coelhos consiste na observação da reprodução de um casal de coelhos (macho e fêmea) no período de

[1] (SILVA, 2017)

um ano, é de interesse descobrir a quantidade de coelhos que irá ser gerada neste intervalo de tempo, para isso, devemos considerar algumas condições iniciais:

a) Cada casal recém-nascido demora 1 mês para atingirem a maturidade sexual, e assim, se reproduzirem no mês seguinte.
b) Após a maturidade sexual, a cada início de mês os coelhos se reproduzem gerando um novo par de coelhos (macho e fêmea), este novo par de coelhos gerados atendem aos critérios de (a).
c) Os coelhos nunca morrem.

Ao analisarmos os critérios para a reprodução dos coelhos, podemos determinar o seguinte comportamento:

- Inicialmente temos um casal de coelhos recém-nascidos;
- No segundo mês, teremos o mesmo casal de coelhos agora maduros sexualmente e capaz de reproduzir;
- No terceiro mês o casal adulto gera um novo casal de coelhos, então recém-nascidos;
- No quarto mês, o casal já adulto gera mais um casal de coelhos recém-nascidos, e os coelhos nascidos no mês 3 atingem sua maturidade sexual, totalizando assim 2 casais de coelhos adultos e 1 casal recém-nascido;
- No quinto mês, os 2 casais adultos geram mais 2 casais de coelhos recém-nascidos e o par de coelhos nascidos no mês 4 atinge sua maturidade sexual, logo temos 3 casais de coelhos adultos e 2 casais recém-nascidos;

Para uma melhor compreensão podemos verificar o crescimento populacional de coelhos no decorrer de um ano seguindo a tabela 1.

Ao seguir esse padrão proposto por Fibonacci, a cada mês teremos valores respectivos à quantidade de coelhos sendo a soma de coelhos recém-nascidos com os adultos. E ao término de um ano podemos definir a quantidade total de coelhos no cercado, os números encontrados foram:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 144\ e\ 233)$$

Nota-se que no 12º mês haverá um total 233 casais de coelhos, além disso, os números que compões este conjunto intitula-se de *números de Fibonacci,* e a sequência formada por eles é a *sequência de Fibonacci,* assim chamada pela primeira vez no século XIX pelo matemático francês Édouard Lucas (KOSHY, 2001).

TABELA 1 – POPULAÇÃO DE COELHOS

	Casais de Coelhos recém-nascidos	Casais de coelhos adultos	Quantidade total de coelhos
Janeiro	1	0	1
Fevereiro	0	1	1
Março	1	1	2
Abril	1	2	3
Maio	2	3	5
Junho	3	5	8
Julho	5	8	13
Agosto	8	13	21
Setembro	13	21	34
Outubro	21	34	55
Novembro	34	55	89
Dezembro	55	89	144
Janeiro	89	144	233

Fonte: (Do Autor, 2022)

1.3 A Sequência de Fibonacci.

Como foi descrito, a sequência de Fibonacci tem seus termos iniciais ordenados seguindo um determinado padrão, com isso, Posamantier e Lehmann (2007, p. 26) determinam que: “Cada número da sequência (após os dois primeiros) é a soma dos dois números anteriores. A sequência pode ser escrita de forma recursiva”. Alguns números iniciais de Fibonacci podem ser conferidos na tabela 2.

TABELA 2 – OS 29 PRIMEIROS NÚMEROS DE FIBONACCI

$\boldsymbol{F_0 = 0}$	$F_6 = 8$	$F_{12} = 144$	$\mathrm{F}_{18} = 2.584$	$\mathrm{F}_{24} = 46.368$
$\boldsymbol{F_1 = 1}$	$F_7 = 13$	$F_{13} = 233$	$\mathrm{F}_{19} = 4.181$	$\mathrm{F}_{25} = 75.025$
$\boldsymbol{F_2 = 1}$	$F_8 = 21$	$F_{14} = 377$	$\mathrm{F}_{20} = 6.765$	$\mathrm{F}_{26} = 121.393$
$\boldsymbol{F_3 = 2}$	$F_9 = 34$	$F_{15} = 610$	$\mathrm{F}_{21} = 10.946$	$\mathrm{F}_{27} = 196.418$
$\boldsymbol{F_4 = 3}$	$F_{10} = 55$	$\mathrm{F}_{16} = 987$	$\mathrm{F}_{22} = 17.711$	$\mathrm{F}_{28} = 317.811$
$\boldsymbol{F_5 = 5}$	$F_{11} = 89$	$\mathrm{F}_{17} = 1.597$	$\mathrm{F}_{23} = 28.657$	$\mathrm{F}_{29} = 514.229$

Fonte: (Do Autor, 2022)

Definição 1.1 - (KOSHY, 2001) A sequência de Fibonacci pode ser descrita formalmente utilizando as condições iniciais em que o primeiro termo $F_0 = 0$, e o segundo termo $F_1 = 1$, com isto, para a obtenção dos termos subsequente até o n-ésimo, utiliza-se a recorrência descrita para $n \geq 2$ da seguinte forma:

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (1.1)$$

Nota-se que a utilização de diferentes condições iniciais gera um vasto acervo de sequências distintas, Koshy (2001, p. 6) destaca que: “A sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas são as duas estrelas brilhantes na grande variedade de sequências inteiras”.

A sequência de Lucas, descrita por L_n, pode ser obtida de forma recursiva semelhante à de Fibonacci, entretanto, a sua conjectura parte da condição inicial que $L_0 = 2 \; e \; L_1 = 1$, com isso, seu n-ésimo termo é obtido por:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \; para \; n \geq 2. \quad (1.2)$$

Ao analisarmos a recorrência e a descrição dos números de Lucas, notamos a fascinante sequência que é gerada, visto que, embora muito parecida com a de Fibonacci, cada uma carrega seu mérito e particularidades, a seguir na tabela 3 poderemos observar os 39 primeiros números da sequência de Lucas.

TABELA 3 – OS 39 PRIMEIROS NÚMEROS DE LUCAS

$\boldsymbol{L_0 = 2}$	$L_8 = 47$	$L_{16} = 2.207$	$L_{24} = 103.682$	$L_{32} = 4.870.847$
$\boldsymbol{L_1 = 1}$	$L_9 = 76$	$L_{17} = 3.571$	$L_{25} = 167.761$	$L_{33} = 7.881.196$
$\boldsymbol{L_2 = 3}$	$L_{10} = 123$	$L_{18} = 5.778$	$L_{26} = 271.443$	$L_{34} = 12.752.043$
$\boldsymbol{L_3 = 4}$	$L_{11} = 199$	$L_{19} = 9.349$	$L_{27} = 439.204$	$L_{35} = 20.633.239$
$\boldsymbol{L_4 = 7}$	$L_{12} = 322$	$L_{20} = 15.127$	$L_{28} = 710.647$	$L_{36} = 33.385.282$
$\boldsymbol{L_5 = 11}$	$L_{13} = 521$	$L_{21} = 24.476$	$L_{29} = 1.149.851$	$L_{37} = 54.018.521$
$\boldsymbol{L_6 = 18}$	$L_{14} = 843$	$L_{22} = 39.603$	$L_{30} = 1.860.498$	$L_{38} = 87.403.803$
$\boldsymbol{L_7 = 29}$	$L_{15} = 1.364$	$L_{23} = 64.079$	$L_{31} = 3.010.349$	$L_{39} = 141.422.324$

Fonte: (Do Autor, 2022)

1.4 A importância da teoria dos números.

A teoria dos números traz como centro de seu estudo as relações e propriedades que regem os números, em particular o conjunto dos inteiros, Santos (1998, p.2) destaca ainda que a teoria dos números se divide em três ramos: Teoria Elementar, Teoria Analítica e Algébrica.

Do ponto de vista histórico, há de ressaltar a importância dos estudos realizados na Grécia pelos pitagóricos, que analisaram as relações existentes entre os números que hoje denominamos como “teoria dos números”. Para os Gregos a parte relacionada a propriedades dos números era visto como aritmética, bem destinada aos matemáticos e filósofos, outra parte do estudo dos números era a logística, que implicava na utilização desses conhecimentos para a realização de cálculos com os números inteiros, já destinados mais amplamente aos comerciantes (GROENWALD; SAUER e FRANKE, 2005).

Vale destacar também a contribuição de Euclides de Alexandria, que em sua coleção “Os elementos”, grande referência para o estudo da Matemática, dedicou 4 volumes ao estudo de teoria dos números, no qual enuncia axiomas, teoremas e demonstrações matemáticas de suas proposições.

Não só na antiguidade, também nos dias atuais, a utilização da teoria dos números se faz bem presente nas outras áreas da Matemática, como Probabilidade, Álgebra e sistemas dinâmicos por exemplo, mas não limitado a isto, também está ativo nas áreas tecnológicas como é descrito por Galdino (2014, p. 3) “A Teoria dos Números é a área da Matemática considerada base teórica da ciência capaz de manter sigilo da informação transmitida entre duas fontes contra terceiros, a criptografia”

A teoria dos números como ferramenta para conjecturas de teoremas e propriedades voltado à sequência de Fibonacci, permite a construção de um vasto estudo das relações existente entre os números de Fibonacci, possibilita um olhar minucioso e a descrição precisa do comportamento destes números entre si. Vale destacar a frase do renomado Matemático alemão Johann Gauss, considerado por muitos como “O príncipe da Matemática”. “A Matemática é a rainha das ciências e a aritmética (teoria dos números) é a rainha da Matemática.”[2]

[2] Bertone (2014, p.7)

1.5 Noções fundamentais de Teoria Aritmética dos números [3]

Nesta seção, serão enunciadas algumas ferramentas matemáticas de aporte para as demonstrações das relações existentes entres os números de Fibonacci, uma sucinta introdução sobre alguns estudos provenientes da teoria dos números.

1.5.1 Divisibilidade

Definição 1.5.1. Tomemos dois inteiros $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$, no qual $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, dizemos que $\boldsymbol{a}$ divide $\boldsymbol{b}$ caso exista um inteiro $\boldsymbol{c}$ tal que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{ac}$**.** Podemos denotar como $\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}\ divide\ \boldsymbol{b}$) ou $\boldsymbol{a} \nmid \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ não divide $\boldsymbol{b}$)**.**

Consideremos os inteiros $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{d}$ é válido as proposições:

Proposição 1.5.1. $a|0$, $1|a$ e $a|a$

Demonstração: Podemos verificar que é válido as relações já que:

$$0 = a\,.0$$
$$a = 1.a$$
$$a = a.1$$

Proposição 1.5.2. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$

Demonstração: Vejamos que:

$$a|b\ \rightarrow\ b = a\,.k_1\ e\ também\ b|c\ \Rightarrow\ c = b\,.k_2, com\ k_1 e\ k_2 \in \mathbb{Z}.$$

logo podemos escrever **c** da seguinte forma:

$$c = (a.k_1)(k_2)$$
$$= a\,.(k_1k_2)$$

Assim: $c = a\,.(k_1k_2) \Rightarrow a|c$.

Proposição 1.5.3. Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$

Demonstração: vejamos que: $a|b\ \Rightarrow\ b = a\,.k_1\ e\ também\ c|d\ \Rightarrow\ d = c\,.k_2$, $com\ k_1 e\ k_2\ \in\ \mathbb{Z}$. Logo, podemos escrever $\boldsymbol{bd}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{bd} = (a.k_1)(c.k_2)$$
$$= (ac)(k_1k_2)$$

Assim: $\boldsymbol{bd} = (ac)(k_1k_2) \Rightarrow ac|bd$

Proposição 1.5.4. Se $a|b$ com $b\ \neq 0$, então $|a| \leq |b|$

[3] Todas as definições, proposições e teoremas desta seção estão de acordo com (FILHO, 1981), (SANTOS, 1998) e (ROSEN, 2000)

Demonstração: Tomemos $a|b$ com $b \neq 0$, desta forma $b = a\,.\,k,\ k \neq 0$ $|b| = |a|\,|k|$ *e como* $k \neq 0$ *então* $|k| \geq 1$, *e como consequencia teremos:*

$$|b| \geq |a|$$

Proposição 1.5.5. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|bk_1 + ck_2$, com k_1 *e* $k_2 \in \mathbb{Z}$

Demonstração: Vejamos que:

$$a|b \ \rightarrow\ b = a\,.\,k_1 \text{ e também } a|c \ \Rightarrow\ c = a\,.\,k_2, \text{com } k_1 \text{e } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$logo, para\ todo\ x, y \in \mathbb{Z}\ teremos:$$

$$bx + cy = ak_1x + ak_2y$$

$$= a(k_1x + k_2y)$$

Assim temos que: $bx + cy = a(k_1x + k_2y) \ \rightarrow\ a|bk_1 + ck_2$

1.5.2 Algoritmo da Divisão

Teorema 1.5.1. Sejam os inteiros $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$ no qual $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}$**,** existem e são únicos os inteiros $\boldsymbol{q}$ *e* $\boldsymbol{r}$ tais que:

$$a = qb + r, com\ 0 \leq r < b$$

(Em que $\boldsymbol{q}$ é o quociente e $\boldsymbol{r}$ é o resto não negativo na divisão decorrente de $\boldsymbol{a}$ *por* $\boldsymbol{b}$)

Demonstração: A demonstração seguirá dois pontos, primeiramente verificando a existência de $\boldsymbol{q}$ *e* $\boldsymbol{r}$, e posteriormente a sua unicidade, assim:

i) A existência de $\boldsymbol{q}$ *e* $\boldsymbol{r}$**.**

Dados $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$ *com* $b > 0$, tomemos um o conjunto $\boldsymbol{S}$ da seguinte forma:

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}\ e\ S \subseteq \mathbb{N}$$

Ao tomarmos $x = -|a|$ obteremos:

$$a - bx = a - b(-|a|) = a + b(|a|) \geq a + (|a|) \geq 0, já\ que\ b \geq 1$$

O que nos mostra que o conjunto é não vazio. Se temos $S \neq \emptyset$, então pelo princípio da boa ordenação (PBO) sabemos que todo conjunto não vazio possui um elemento mínimo $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{S}, r \geq 0$**,** e também um $x = q, q \in \mathbb{Z}$, tal que: $r = a - bq$. Segue então que $a = bq + r$.

Vale ressaltar também que $r < b$, já que caso ocorresse de $r \geq b$, como $r = a - bq$, analisemos a situação para um sucessor de $\boldsymbol{q}$, isto é:

$$a - b(q + 1) = (a - bq) - b = r - b \geq 0$$

Ou seja, $r > a - b(q + 1) \in \mathbb{Z}$, o que contradiz o PBO, já que r é o menor elemento de S. Desta forma temos que $r < b$.

ii) Unicidade de $\boldsymbol{q}$ *e* $\boldsymbol{r}$:

Para mostrarmos que $\boldsymbol{q}\ e\ \boldsymbol{r}$ são únicos, suponhamos que existam $\boldsymbol{q}' e \boldsymbol{r}' \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$a = bq' + r' com\ 0 \leq r' < b$$

$$bq + r = bq' + r'$$

$$r - r' = bq' - bq\ ou\ seja\ (r - r') = (q' - q)b \Rightarrow b|(r - r')$$

Como temos que $r' < b\ \ e\ \ r < b$, então $|r' - r| < b$, logo $r' - r = 0$, o que implica em $r' = r$, e também $bq = bq'$, ou seja $q = q'$ já que $b > 0$.

1.5.3 Máximo divisor comum

Definição 1.5.3. É chamado de máximo divisor comum de $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}\ com\ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}\ ou\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$ o maior inteiro positivo $\boldsymbol{d}$ que divide tanto $\boldsymbol{a}$ quanto $\boldsymbol{b}$, denotado por $mdc(a, b)$.

i) $d|a\ e\ d|b$

ii) Se $d'|a\ e\ d'|b\ então\ d' \leq d$

Teorema 1.5.2. seja $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$ (com $\boldsymbol{a}\ ou\ \boldsymbol{b}$ diferente de zero) logo, existe e é único o $mdc(a, b)$. E também seja $d = mdc(a, b)$, então existem $\boldsymbol{x}\ e\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}$ tal que $d = ax + by$.

Demonstração: Consideremos o conjunto S de todas as combinações lineares $ax + by$, desta forma temos: $S = \{ax + by \mid ax + by > 0, com\ x, y \in \mathbb{Z}\}$ e $S \subseteq \mathbb{N}$, e este conjunto S não é vazio, visto que pelo menos uma das combinações $a\,.1 + b\,.0\ ou\ a(-1) + b\,.0$ é positiva e pertence ao conjunto. Desta forma, tomemos $\boldsymbol{d}$ como o menor elemento de $\boldsymbol{S}$ (pelo princípio da boa ordenação), logo, podemos escrever $\boldsymbol{d}$ como $d = ax + by$. Pelo teorema 1.5.1 temos:

$$a = dq + r, com\ 0 \leq r < d,$$

Convém algumas manipulações, logo:

$$\begin{aligned} r &= a - dq \\ &= a - (ax + by)q \\ &= a - axq - byq \\ &= a(1 - qx) + b(-qy) \end{aligned}$$

Podemos observar que $r = a(1 - qx) + b(-qy)$, isto é, r é uma combinação linear de $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$**,** já que $(1 - qx)\ e\ (-qy)$ são inteiros, além disso, temos $0 \leq r < d$ e como $d > 0$ é o menor elemento de S então resta que $r = 0$, o que nos deixa com a igualdade $a = dq$, ou seja $d|a$.

De forma análoga podemos verificar se d é um divisor de b.

Tomemos o mesmo conjunto S, e para b temos:

$$b = dq + r, com\ 0 \leq r < d$$

Convém também algumas manipulações, logo:

$$\begin{aligned} r &= a - dq \\ &= a - (ax + by)q \\ &= a - axq - byq \\ &= a(1 - qx) + b(-qy) \end{aligned}$$

Podemos observar que $r = a(1 - qx) + b(-qy)$, isto é, r é uma combinação linear de $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$**,** como vimos anteriormente, podemos concluir que $r = 0$, o que nos deixa com a igualdade $b = dq$, ou seja $d|a$. Logo, $\boldsymbol{d}$ é um divisor tanto de $\boldsymbol{a}$ quanto de $\boldsymbol{b}$**.**

Mostraremos agora que $\boldsymbol{d}$ é o maior divisor comum de $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$**,** para isso, suponhamos que seja $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}\ e\ c > 0$ um divisor de $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$, isto é; $c|a\ e\ c|b$. Pela proposição 1.5.5 temos:

$$c|ax + by$$

O que nos convém dizer que $c|d$ logo $c \leq d$, com isso temos que $\boldsymbol{d}$ é o maior dentre os divisores comuns positivos de $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$, o que nos permite dizer que, $mdc(a, b) = d = ax + by, com\ x, y \in \mathbb{Z}$, o que finaliza a demonstração do teorema.

Há de ressaltar que:

i) $O\ mdc(0,0)\ não\ existe$.

ii) $mdc(a, 1) = 1$

iii) $Se\ a|b, então\ o\ mdc(a, b) = |a|$

iv) $se\ a \neq 0, então\ o\ mdc(a, 0) = |a|$

Teorema 1.5.3. Sejam os inteiros $\boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{b}$ no qual $a = bq + r$ com $\boldsymbol{q}\ \ e\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}$, então temos que: $mdc(a, b) = mdc(b, r)$

Demonstração: seja $d = mdc(a, b)$**,** desta forma sabemos que d é um divisor comum de $a\ e\ b$, como $a = bq + r$ tomemos este descrito como $r = a - bq$, já que $d|a$ e $d|b$, então temos $d|(a - bq)$, isto é, $d|r$, vemos que $\boldsymbol{d}$ é um divisor comum de $\boldsymbol{b}\ e\ \boldsymbol{r}$.

Ao considerarmos $\boldsymbol{c}$ como um divisor qualquer de $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{r}$, teremos que $c|b$ e $c|r,$ o que nos garante então que $c|bq + r$, e como $a = bq + r$ então $c|a$, ou seja $\boldsymbol{c}$ também é um divisor comum de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, então $c \leq d,$ e desta forma teremos que $mdc(b, r) = d$.

1.5.4 Algoritmo de Euclides.

Teorema 1.5.4. Seja $a\ e\ b$ dois inteiros em que $a > b > 0\ e\ a \nmid b$, a aplicação do algoritmo da divisão repetidas vezes (teorema 1.5.1), de tal modo que obtenhamos um resto zero, isto é:

$$
\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\
b = r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 = r_3q_4 + r_4, & 0 < r_4 < r_3 \\
\vdots & \vdots \\
r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, & r_{n+1} = 0
\end{array}
$$

Então o $mdc(a, b) = r_n$, ou seja, o ultimo resto não nulo.

Demonstração: Pelo teorema 1.5.3, temos que $mdc(a, b) = mdc(b, r)$, o que podemos analisar como:

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \ldots = mdc(r_{n-2}, r_{n-1}) = mdc(r_{n-1}, r_n)$$

Como $r_{n+1} = 0$, ou seja $r_n|r_{n-1}$, desta resulta que:

$$mdc(a, b) = mdc(r_{n-1}, r_n) = r_n$$

Capítulo 2

2.1 Propriedades aritméticas da sequência de Fibonacci.[4]

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades que regem os números de Fibonacci, vale ressaltar o grande quantitativo de propriedades existentes e até mesmo inexplorados. Para uma compressão e seguimento lógico da proposta da pesquisa, os resultados aqui apresentados, quanto às demonstrações das propriedades, serão de caráter Aritméticos.

Propriedade 1: $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$, para todo n inteiro positivo, isto é, quaisquer números consecutivos de Fibonacci são primos entre si.

Demonstração: Pela definição da sequência sabemos que cada termo é obtido adicionando os 2 termos anteriores, com isso, ao realizarmos a divisão de dois termos consecutivos, em que o primeiro é dividendo e seu antecessor é o divisor, o quociente encontrado será 1 e o resto será a diferença entre dividendo e divisor. Desta forma, seguindo o algoritmo de Euclides para determinar o mdc obteremos:

$$\begin{gathered}
F_{n+1} = 1\,.\,F_n + F_{n-1}, \quad 0 < F_{n-1} < F_n \\
F_n = 1\,.\,F_{n-1} + F_{n-2}, \quad 0 < F_{n-2} < F_{n-1} \\
F_{n-1} = 1\,.\,F_{n-2} + F_{n-3}, \quad 0 < F_{n-3} < F_{n-2} \\
F_{n-2} = 1\,.\,F_{n-3} + F_{n-4}, \quad 0 < F_{n-4} < F_{n-3} \\
\vdots \\
F_4 = 1\,.\,F_3 + F_2, \quad 0 < F_{n-2} < F_{n-1} \\
F_3 = 2\,.\,F_2 + 0
\end{gathered}$$

O máximo divisor comum entre dois valores é descrito pelo algoritmo de Euclides como último resto diferente de zero, então temos:

$$mdc(F_n, F_{n+1}) = F_2$$

E como vimos por definição, $F_2 = 1$ o que finaliza nossa demonstração

$$mdc(F_n, F_{n+1}) = F_2 = 1$$

■

[4] As propriedades apresentadas neste capítulo estão de acordo com (KOSHY, 2001), (SILVA, 2017)

Propriedade 2: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$, onde m e n são inteiros positivos.

Demonstração:

i) Notemos que a igualdade é verdadeira para $n = 1$ com m fixo:

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_{m-1} + F_m \\ &= F_{m-1}1 + F_m1 \\ &= F_{m-1}F_1 + F_mF_2 \end{aligned}$$

ii) Supondo que a igualde seja verdadeira para $n-1$ e n dessa forma teremos:

$$F_{m+(n-1)} = F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n \qquad (2.1)$$

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} \qquad (2.2)$$

iii) Provaremos que a igualde é verdadeira para $n+1$.

Tomemos $(2.1) + (2.2)$;

$$\begin{aligned} F_{m+(n-1)} + F_{m+n} &= F_{m-1}F_{n-1} + F_{m-1}F_n + F_mF_n + F_mF_{n+1} \\ &= F_{m-1}(F_{n-1} + F_n) + F_m(F_n + F_{n+1}) \end{aligned}$$

Pela relação de recorrência temos;

$$F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$$

$$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$$

Portanto:

$$F_{m+(n+1)} = F_{m-1}F_{n+1} + F_mF_{n+2}$$

■

Propriedade 3: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração: Utilizaremos a indução sobre n para mostrar que a propriedade é válida, logo:

i) A igualdade é verdadeira para $n = 1$ já que;

$$\begin{aligned} (-1)^1 &= 0 - 1^2 \\ &= F_0 - (F_1)^2 \\ &= F_0F_2 - F_1^2 \end{aligned}$$

ii) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n = k \in \mathbb{N}$, logo:

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k \qquad (2.3)$$

iii) Verificaremos se a igualdade é válida para $n = k + 1$, dessa forma, buscamos encontrar:

$$F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$$

Aplicaremos a ambos membros da equação (2.3) o produto por (-1), e por conveniência apresentaremos como $(-1)^k = F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2$ logo:

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1} &= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2)\\ &= F_{k+1}(-F_{k-1}) + F_k^2\\ &= F_{k+1}(F_k - F_{k+1}) + F_k^2\\ &= F_{k+1}(F_{k+1} - F_k) - F_k^2\\ &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}^2\\ &= F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2\end{aligned}$$

Assim, verificamos que a igualdade é verdadeira para $n = k + 1$, isto é, é válido para todo $\mathbb{N}$.

■

Propriedade 4: $F_m | F_{mn}$, para todo $m \in \mathbb{N}\ e\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração:

iv) A igualdade é verdadeira para $n = 0$ já que;

$$F_m | 0$$

$$F_m | F_0$$

$$F_m | F_{m0}$$

v) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n - 1$ e n, logo:

$$F_m | F_{m(n-1)} \text{ e } F_m | F_{mn}$$

Provaremos que a igualdade é válida para $n + 1$, e pela propriedade 2 podemos escrever a seguinte relação;

$$F_{m(n+1)} = F_{mn+m} = F_{m(n-1)}F_m + F_{mn}F_{m+1}$$

vi) Pela hipótese de indução sabemos que $F_m | F_{m(n-1)}$ e $F_m | F_{mn}$, portanto é valido que:

$$F_m | F_{m(n-1)}F_m + F_{mn}F_{m+1}$$

$$F_m | F_{m(n+1)}$$

■

Propriedade 5: $(F_{n+1})^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$, com n sendo um inteiro positivo.

Demonstração:

i) A igualdade é verdadeira para $n = 1$, já que;

$$\begin{aligned}(F_1)^2 &= 1^2\\ &= 1.2 - 1\\ &= F_1F_3 + (-1)^1\end{aligned}$$

ii) Suponhamos agora, que essa igualdade seja verdadeira para um inteiro qualquer positivo, isto é. Para $n = k$;

$$(F_{k+1})^2 = F_kF_{k+2} + (-1)^k \tag{2.4}$$

iii) Mostraremos agora que a afirmação é verdadeira para $k + 1$, e assim concluiremos que é válida para todo n, para isso, adicionaremos $F_{k+1}F_{k+2}$ em ambos lados de (2.4) juntamente com os ajustes necessários;

$$(F_{k+1})^2 + F_{k+1}F_{k+2} = F_kF_{k+2} + (-1)^k + F_{k+1}F_{k+2}$$

$$F_{k+1}(F_{k+1} + F_{k+2}) = F_{k+2}(F_k + F_{k+1}) + (-1)^k$$

$$F_{k+1}F_{k+3} = (F_{k+2})^2 + (-1)^k$$

Adicionando $(-1)^{k+1}$ em ambos lados teremos:

$$(F_{k+2})^2 = F_{k+1}F_{k+3} + (-1)^{k+1}$$

O que finaliza nossa demonstração, já que a afirmação é verdadeira para $k + 1$ então será verdadeira para todo inteiro positivo n.

■

Propriedade 6: $F_m|F_n$, para m e n inteiros positivos, tal que $m|n$.

Demonstração: Pela definição (1.5.1) sabemos que se $m|n$, então, existirá um inteiro q que satisfaça: $n = mq$.

i) Façamos $q = 1$, então teremos $n = m$, desta forma é válido que $F_m|F_n$.

ii) Suponhamos que essa igualdade seja verdadeira para um natural qualquer, isto é, façamos $n = k$. Então por hipótese temos:

$$F_m|F_{mk}$$

iii) Mostraremos que a igualdade é verdadeira para $q = k + 1 \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$F_m|F_{m(k+1)}$$

Para $F_{m(k+1)} = F_{mk+m}$ podemos aplicar a propriedade 2 e assim obteremos:

$$F_{m(k+1)} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$$

Podemos verificar que é válido que $F_m|F_{mk-1}F_m$ e por hipótese, como $F_m|F_{mk}$ então:

$$F_m|F_{mk}F_{m+1}$$

Pela proposição (1.5.5) teremos que:

$$F_m | F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$$

Ou seja, a afirmação é verdadeira para $n = k + 1$ o que finaliza nossa demonstração.

Propriedade 7: Seja $m = nq + r$, então $mdc(F_m, F_n) = mdc(F_n, F_r)$.

Demonstração: Com $m = nq + r$ então podemos escrever; $mdc(F_m, F_n) = mdc\left(F_{nq+r}, F_n\right)$, e pela propriedade 2 teremos ainda; $mdc(F_m, F_n) = mdc(F_{nq-1}F_r + F_{nq}F_{r+1}, F_n)$.

Pelas propriedades de mdc [5], se $b|c$, o $mdc(a + c, b) = mdc(a, b)$, e visto que, $F_n | F_{nq}$ (Propriedade 6), então resultamos em:

$$mdc(F_m, F_n) = mdc(F_{nq-1}F_r, F_n)$$

Como suporte para o seguimento da demonstração, verificaremos que o $mdc\left(F_{nq-1}, F_n\right) = 1$, Para isso, usaremos $d = mdc\left(F_{nq-1}, F_n\right)$.

Pela proposição (1.5.2) sabemos que:

$d | F_n$ e $F_n | F_{nq}$ então é válido que $d | F_{nq}$.

Assim temos d como um divisor comum de F_{nq-1} e de F_n, e como estes números são consecutivos, utilizando a propriedade 1 sabemos que seu mdc é igual a 1, ou seja $mdc\left(F_{nq-1}, F_n\right) = 1$.

Por meio das propriedades de mdc, teremos $mdc(a, c) = 1$ o que nos garante que $mdc(a, bc) = mdc(a, b)$, com isso podemos escrever a relação:

$$mdc(F_m, F_n) = mdc\left(F_{nq-1}, F_n\right) = mdc(F_n, F_r)$$

■

Propriedade 8: $mdc(F_m, F_n) = F_d$, em que $d = mdc(m, n)$, isto é, o mdc entre dois números de Fibonacci, ainda será um número de Fibonacci.

Demonstração: Seguiremos a demonstração desta propriedade por meio do Algoritmo de Euclides, e para isso, suponhamos $m > n$, e assim calcularemos o mdc de m e n:

$$m = nq_1 + r_1, \qquad 0 < r_1 < n$$

$$n = r_1q_2 + r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \qquad 0 < r_3 < r_2$$

---

[5] (FILHO, 1981)

$$r_2 = r_2 q_3 + r_3, \qquad 0 < r_4 < r_3$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \qquad 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0$$

Pelo teorema (1.5.4) concluímos então que $mdc(m, n) = r_n$, e por meio da propriedade 7, podemos escrever a relação:

$$mdc(F_n, F_n) = mdc\left(F_n, F_{r_1}\right) = mdc\left(F_{r_1}, F_{r_2}\right) = \ \dots\ = mdc\left(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}\right)$$

Sabemos pela propriedade 6 que, se $r_n | r_{n-1}$, então $F_{r_n} \middle| F_{r_{n-1}}$, o que nos garante que $mdc\left(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}\right) = F_{r_n}$, e como vimos por meio do algoritmo de Euclides, r_n é o mdc de m e n, o que finaliza a demonstração e fica provado que:

$$mdc(F_m, F_n) = F_{mdc(m,n)}.$$

■

2.2 Algumas propriedades da sequência de Fibonacci quanto à adição de termos.[6]

Seja a sequência de Fibonacci F_n, em que teremos n como um número inteiro positivo, então verificaremos as seguintes propriedades.

Propriedade 9:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

Demonstração: Mostraremos por indução sobre n, que a soma consecutiva dos números de Fibonacci gera a identidade proposta, isto é;

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

i) Notemos que a identidade é verdadeira para $n = 1$, já que:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= F_{1+2} - 1 \end{aligned}$$

ii) Suponhamos que a igualdade seja válida para um natural qualquer, isto é, para $n = k$, assim teremos:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ \dots + F_K = F_{K+2} - 1$$

---

[6] (DIAS, 2015)

iii) Verificaremos se a igualdade se mantém verdadeira para $n = k + 1$, logo:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ \dots + F_k + F_{k+1} &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} \\ &= (F_{k+1} + F_{k+2}) - 1 \\ &= F_{k+3} - 1 \\ &= F_{(k+1)+2} - 1 \end{aligned}$$

Como podemos ver, a condição foi satisfeita, ou seja, é válido para $k + 1$ o que nos garante que será válido também para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Propriedade 10:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

Demonstração: Mostraremos por indução sobre n, que a soma dos termos de Fibonacci de índice impar resulta em um termo de Fibonacci de índice par, isto é:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

i) Notemos que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, já que:

$$F_1 = 1 = F_{2.1}$$

ii) Suponhamos que a igualdade seja válida para para $n = k \in \mathbb{N}$.

iii) Verificaremos se a igualdade continua verdadeira para $n = k + 1$, logo:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \ \dots + F_{2k-1} + F_{2k+1} &= F_{2k} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k+2} \\ &= F_{2(k+1)} \end{aligned}$$

Assim verificamos que é válido para $k + 1$, e consequentemente válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Propriedade 11:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n-1} - 1$$

Demonstração: Mostraremos por indução sobre n, que a soma dos termos de Fibonacci de índice par resulta na seguinte identidade:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ \dots + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$$

i) Notemos que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, já que:

$$\begin{aligned} F_2 &= 1 \\ &= F_3 - 1 \end{aligned}$$

$$= F_{4.1-1} - 1$$

ii) Suponhamos que a igualdade seja válida para para $n = k, k \in \mathbb{N}$.

iii) Mostraremos que a igualdade se mantém verdadeira para $n = k + 1$, logo:

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + F_6 + \ \dots + F_{2k} + F_{2k+1} &= (F_{2k-1} - 1) + F_{2k+1} \\ &= (F_{2k-1} + F_{2k}) - 1 \\ &= (F_{2k+1}) - 1 \end{aligned}$$

Verificamos assim, que é válido para $k + 1$, e consequentemente válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Propriedade 12:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n . F_{n+1}$$

Demonstração: Mostraremos por indução sobre n, que a soma dos quadrados dos termos de Fibonacci geram a seguinte identidade:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ \dots + F_n^2 = F_n . F_{n+1}$$

i) Notemos que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, já que:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= 1 \\ &= 1.1 \\ &= F_2^2 . F_1^2 \end{aligned}$$

ii) Suponhamos que a igualdade seja válida para para $n = k, k \in \mathbb{N}$, isto é:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ \dots + F_k^2 = F_k . F_{k+1} \tag{2.5}$$

iii) Mostraremos que a igualdade se mantém verdadeira para $n = k + 1$, para isso, adicionaremos F_{k+1}^2 a ambos lados da igualdade (2.5).

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_{k+1} . F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} . F_{k+1} + F_{k+1} . F_{k+1} \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} . F_{k+2} \end{aligned}$$

Como a igualdade é verdadeira também para $n = k + 1$, logo é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Propriedade 13:

$$\sum_{i=1}^{n} iF_i = (n+1)F_{n+2} - F_{n+4} + 2$$

Demonstração: Por meio da indução sobre n, logo:

i) Verificamos que a igualdade é verdadeira para $n = 1$, já que;

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ &= 4 - 5 + 2 \\ &= 2F_{1+2} - F_{1+4} + 2 \end{aligned}$$

ii) Iremos supor que a afirmação seja verdadeira para um natural qualquer, isto é, para $n = k$, assim;

$$F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \cdots + kF_k = (k+1)F_{k+2} - F_{k+4} + 2 \tag{2.6}$$

iii) Queremos provar que a igualdade também é verdadeira para $n = k + 1$, para isso, adicionaremos $(k+1)F_{k+1}$ em (2.6), então;

$$\begin{aligned} F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \cdots + kF_k + (k+1)F_{k+1} &= (k+1)F_{k+2} - F_{k+4} + 2 + (k+1)F_{k+1} \\ &= (k+1)(F_{k+2} + F_{k+1}) - F_{k+4} + 2 \\ &= (k+1)F_{k+3} - F_{k+4} + 2 \end{aligned}$$

Por convenção, adicionaremos e subtrairemos F_{k+3} no segundo membro da equação;

$$\begin{aligned} &= (k+2)F_{k+3} - (F_{k+3} + F_{k+4}) + 2 \\ &= (k+2)F_{k+3} - (F_{k+5}) + 2 \end{aligned}$$

Esta última equação é o que buscávamos ao fazer $n = k + 1$, logo, mostramos assim que a relação é válida para todo n natural.

■

Capítulo 3

3.1 Édouard Lucas.[7]

A sequência conhecida hoje como Sequência de Lucas, advém dos estudos sobre a sequência de Fibonacci proposto pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas, intitulou-se como sequência de Lucas em homenagem a este matemático que teve importante contribuição para a popularização e conjectura das propriedades que regem a sequência de Fibonacci.

Édouard Lucas foi um grande pesquisador matemático, em particular, na área de teoria dos números em que teve suas mais importantes contribuições, a ele deve-se a descoberta em 1876, do número primo de 39 algarismos que por 75 anos perdurou como o maior número primo descoberto, atualmente ainda retém o recorde de maior número primo encontrado e testado sem o auxílio de computadores, sendo este;

$$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

Não só em áreas de teoria dos números como também na Matemática recreativa, Lucas trouxe grandes contribuições, é o criador do famoso jogo matemático conhecido como “Torre de Hanoi”, jogo capaz de despertar o raciocínio lógico e ideias sobre sequencias dentre outras como o “Quebra-cabeças de Banguenaudier” conhecido também como “Anéis Chineses”.

Como visto no capítulo 1, a sequência de Lucas é resultado da mudança de termos iniciais da sequência de Fibonacci, a ponto de curiosidade, Edouard Lucas foi quem intitulou como “Sequência de Fibonacci”, mas nunca nomeou a sequência que hoje carrega seu nome, já que para ele, tratava-se ainda da sequência de Fibonacci com uma indexação diferente da convencional.

3.2 Relações entre as sequências de Fibonacci e Lucas.[8]

A sequência de Lucas carrega consigo também suas propriedades, no capítulo anterior, mostramos algumas identidades quanto a soma dos termos de Fibonacci,

[7] (EVES, 2011), (SILVA, 2017) e (GUEDES; ALVES. 2019)
[8] (SILVA, 2017) e (KOSHY, 2001).

estas propriedades podem ser deduzidas também para a sequência de Lucas. Apresentaremos apenas algumas das identidades de adição de termos de Lucas sem às demonstrar, juntamente com a relação entre os termos de Fibonacci e Lucas.

i)

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1$$

iii)

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2$$

iv)

$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} = L_{2n+2} - 2$$

v)

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$$

Veremos agora, algumas propriedades que nos permitem relacionar os termos de Lucas com os de Fibonacci,

Identidade 3.1: Iremos definir os termos de Lucas a partir de Fibonacci, desta forma, escreveremos L_n em função de F_{n-1} e F_{n+1}.

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, n \geq 1$$

Podemos verificar que existe relação entre os termos de ambas sequências, e por meio desta identidade e a recorrência de Fibonacci, poderemos chegar em outras relações.

Identidade 3.2: Também é possível escrever números de Fibonacci em função de Lucas, assim temos:

$$5F_n = 2L_{n+1} - L_n, n \geq 2$$

Por meio da propriedade (3.1), sabemos que $L_n = 2F_{n+1} - F_n$, e $L_{n+1} = 2F_{n+2} - F_{n+1}$, logo temos que:

$$\begin{aligned} 5F_n &= 4Fn + F_n \\ &= 4(F_{n+2} - F_{n+1}) + F_n \\ &= 4F_{n+2} - 4F_{n+1} + F_n \\ &= 4F_{n+2} - 2F_{n+1} - 2F_{n+1} + F_n \\ &= 2(2F_{n+2} - F_{n+1}) - (2F_{n+1} - F_n) \\ &= 2L_{n+1} - L_n \end{aligned}$$

Identidade 3.3: $F_n + L_n = 2F_{n+1}$, com $n \geq 0$.

Tal identidade pode ser validada já que, utilizando a recorrência de Fibonacci e a identidade 3.1 teremos:

$$\begin{aligned} F_n + L_n &= (F_{n+1} - F_{n-1}) + (F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1}) + (F_{n+1} + F_{n-1}) \\ &= F_{n+1} + F_{n+1} \\ &= 2F_{n+1} \end{aligned}$$

Identidade 3.4: Para $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Por meio da recorrência de Fibonacci e a propriedade 3 vale a seguinte relação: $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$ e elevando a propriedade 3.1 ao quadrado teremos;

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} + F_{n-1}^2 \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})^2 + 4F_{n+1}F_{n-1} \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade 3 e a relação de recorrência de Fibonacci ficamos com:

$$\begin{aligned} &= F_n^2 + 4(F_n^2 + (-1)^n) \\ &= 5F_n^2 + 4(-1)^n \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, mostramos a fascinante sequência numérica gerada por meio de um simples problema proposto ainda na idade média, fizemos uma abordagem histórica e apresentamos alguns resultados de teoria dos números que nos ajudou a realizar um estudo mais detalhado sobre a sequência.

Em prosseguimento, apresentamos algumas propriedades aritméticas da sequência de Fibonacci, no qual cuidamos para que as demonstrações propostas fossem o mais claro e simples, porém, não menos elegante, já que propomos a pesquisa como também um material didático para estudos posteriores voltados tanto para teoria dos números quanto a própria sequência de Fibonacci.

Por meio das pesquisas realizadas, é notório quão rica são as sequências estudadas, e não apenas para olhares aritméticos, podendo ser explorado também por meio da combinatória, geométrica e entre outros. Vale destacar também que não fica presa na área da Matemática pura, e deixamos como sugestão para uma futura pesquisa o seguinte tema, voltado para educação Matemática, “A utilização da sequência de Fibonacci no dia a dia e suas manifestações na natureza”, tema esse que permite a exploração do conteúdo até mesmo no ensino básico, podendo levar os alunos a campo a fim de investigarem as manifestações dos números de Fibonacci ao seu redor.

REFERÊNCAIS

BERTONE, A. M. A. **Introdução à teoria dos números.** Uberlância, MG. UFU, 2014.

DIAS, A. F. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro: Modelos variacionais.** Campinas, 2015, 102 p. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade estadual de campinas, instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** 4 ed. Campinas, 2011

FILHO, E. de A. **Teoria elementar dos números.** São Paulo. Nobel, 1981.

GALDINO, U. A. **Teoria dos números e criptografia com aplicações básicas.** Campina Grnade, 2014, 77 p. Dissertação (Mestrado profissional em rede nacional). Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia.

GROENWALD, C. L. O.; SAUER, L. de O.; FRANKE, R. F. A história da Matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da Matemática no ensino básico. **Paradígma**. Maracay, vol. 26, n. 2, 2005. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/337. Acesso em 13 mar. 2022.

GUEDES, A. M. S.; ALVES, F. R. V. Uma investigação com professores em formação inicial sobre: sequências de Lucas e os números de k-Lucas. **Research, Society and Development.** Itajubá, vol. 8, n. 7, 2019. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/337. Acesso em 13 mar. 2022.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas number with applications**. New York, Wiley-intercience, 2001

POSAMANTIER, A. S.; LEHMANN, I. **The fabulous fibonacci numbers.** New York, Prometheus Books, 2007.

ROSEN, K. H. **Elementary number theory.** 6. Ed. Boston, Pearson, 2011. LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo, Atlas, 2003.

SANTOS, J. P. de O. **Introdução à teoria dos números.** Rio de Janeiro, 1998.

SILVA, B. A. e. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. São Carlos, 2017, 81 p. Dissertação (Mestrado – Programa de pós-graduação em mestrado profissional de ciências Matemática). Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação.