Natanael Igor Ferreira Nogueira

Uma interpretação combinatória, via ladrilhamento para a sequência de Fibonacci

Manaus

2019

Natanael Igor Ferreira Nogueira

Uma interpretação combinatória, via ladrilhamento para a sequência de Fibonacci

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto à disciplinas de TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Universidade do Estado do Amazonas – UEA

Escola Normal Superior

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Dr. Almir Cunha da Graça Neto

Coorientador: ——

Manaus

2019

GOVERNO DO ESTADO DO
AMAZONAS

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de NATANAEL IGOR FERREIRA NOGUEIRA

Aos 8 dias do mês de novembro de 2019, às 18:30 horas, em sessão pública na Sala Laboratório de Matemáticada Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pela professora da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Me. Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Dr. Almir Cunha da Graça Neto, Me. Edson Lopes de Souza e Dr. Kelvin Souza de Oliveira** o aluno **NATANAEL IGOR FERREIRA NOGUEIRA** apresentou o Trabalho: **"UMA INTERPRETAÇÃO COMBINATÓRIA, VIA LADRILHAMENTO PARA A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI"** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,7 à monografia divulgando o resultado ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata.

Helisângela Ramos da Costa
Presidente da Banca Examinadora

Almir Neto
Orientador (a)

Kelvin Souza de Oliveira
Avaliador 1

Edson Lopes de Souza
Avaliador 2

Natanael Igor Ferreira Nogueira
Aluno

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

Ao meu orientador Dr. Almir Cunha da Graça Neto, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte no decorrer deste trabalho, em especial a minha namorada amada, o meu muito obrigado.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Um $n - tabuleiro$ numerado e duas peças, o quadrado e dominó 14
Figura 2 – As 5 possíveis coberturas de um $4 - tabuleiro$ 15
Figura 3 – Cobertura do $(n + 2) - tabuleiro$ com localização do dominó(cinza). . . 21
Figura 4 – Cobertura do $(2n + 1) - tabuleiro$ com localização do quadrado(azul) . 21
Figura 5 – Ladrilho quebrável em m. 23
Figura 6 – Ladrilho inquebrável em m. 23
Figura 7 – Dois ladrilhos colocados em conjunto, de modo que o segundo comece uma posição à direita 25

Lista de definições

1 Definição (Sequência de Fibonacci) 13
2 Definição (Tabuleiro) 13
3 Definição (Peças) 14
4 Definição (Ladrilhamento) 14
5 Definição (Número de ladrilhamentos) 15

6 Definição (Ladrilhamento quebrável e inquebrável) 21
7 Definição (Caudas de tabuleiros) 24

Listas de identidades

1 Identidade 20
2 Identidade 21
3 Identidade 22
4 Identidade 23
5 Identidade 25

Sumário

INTRODUÇÃO 8

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 10
1.1 Aspectos históricos 10
1.2 O problema dos coelhos 11
1.3 Perfil de recorrência 12
1.4 O tabuleiro 13
1.5 Fibonacci e os Ladrilhamentos 14

2 METODOLOGIA 17
2.1 Abordagem Metodológica 17
2.2 Instrumentos de Coleta de Dados 18
2.3 Etapas 18

3 PROVAS DAS IDENTIDADES 20
3.1 Identidade dos Números de Fibonacci 20

CONSIDERAÇÕES FINAIS 27

REFERÊNCIAS 28

Introdução

A sequência de Fibonacci é definida, recursivamente, da seguinte forma: Para $n \geq 0$, se F_n denotar o n-enésimo número de Fibonacci, definimos

a) $F_0 = 0, F_1 = 1$ (Condições iniciais)

b) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ (A relação de recorrência).

Esta definição descreve a sequência

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...,$$

onde cada número na sequência é dada pela soma dos dois termos anteriores.

Esta sequência é derivada do famoso "problema dos coelhos" de 1202, advindo do livro *Liber Abaci*, escrito por Fibonacci, no qual, foram originalmente usados para representar os número de pares de coelhos nascidos em um determinado mês.

Vamos supor que um par de coelhos é introduzido em um determinado lugar no primeiro mês do ano. Este par de coelhos vai produzir um par de descendentes a cada mês, e cada par de coelhos vai começar a se reproduzir exatamente dois meses depois de nascer. Nenhum coelho morre e cada par de coelhos irá reproduzir perfeitamente no horário. Então, no primeiro mês, temos apenas o primeiro par de coelhos. Da mesma forma, no segundo mês, novamente, temos apenas nosso par inicial de coelhos. No entanto, a partir do terceiro mês, o par vai dar à luz a outro par de coelhos, agora, dois pares. Continuando, descobrimos que no quarto mês teremos três pares, então cinco pares no mês cinco, depois $8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...$, etc. É bastante evidente que esta sequência corresponde diretamente com a sequência definida acima. Na verdade, foi o primeiro problema associado a essa sequência especial (ZAHN, 2011).

É uma sequência enganosamente simples, mas de ramificações e aplicações praticamente ilimitadas, que fascina os matemáticos há anos e oferece amplas oportunidades para profissionais e amadores fazerem conjecturas e expandir sua aplicabilidade. Os números de Fibonacci possuem propriedades maravilhosas e surpreendentes. Embora algumas sejam simples e conhecidas, outras são de difícil verificação. Centenas de identidades e propriedades envolvendo os números de Fibonacci surgiram em várias revistas e livros ao longo dos anos e grande parte, infelizmente, não é facilmente acessível a muitos, especialmente para os não profissionais.

Os estudantes de Matemática que já passaram pelos assuntos de análise combinatória, viram provas que usam a contagem direta e formalística envolvendo o coeficiente binomial. A definição de

$$\binom{n}{k},$$

ou seja, o número de formas de escolher k elementos de um conjunto com n elementos, concede uma ferramenta que usa-se para demonstrar muitas propriedades binomiais. Por outro lado, pode-se interpretá-lo por seu aspecto combinatório para as demonstrações das identidades, decorridas de seu significado. Por exemplo, para provar a identidade

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

suponha o seguinte problema: "o número de maneiras a formar equipes com k pessoas de um grupo de n pessoas, no qual uma dessas k pessoas é o capitão". Para isso contaremos tal conjunto de duas maneiras diferentes. Primeiro escolhendo a equipe e, em seguida, escolhendo uma dessas k pessoas para ser capitão. Outra maneira seria escolher um capitão dentre n pessoas, e em seguida escolher $k-1$ das $n-1$ pessoas restantes para obter o resto da equipe. Portanto, o número de maneiras escolher primeiro a equipe e, em seguida, escolher um capitão dos membros da equipe (o lado esquerdo da equação) é o mesmo que o número de maneiras de escolher primeiro um capitão e, em seguida, escolher o restante da equipe (o lado direito da equação). Consequentemente, provar essa identidade, equivale a simplesmente considerar um exemplo do mundo real. A prova resultante é muito mais satisfatória e acessível do que as manipulações algébricas da fórmula $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Sucede-se que, essa forma de contagem também pode ser usada para demonstrar identidades envolvendo os números de Fibonacci. Um dos aspectos interessantes das demonstrações por meio deste tipo de contagem é a facilidade com que elas são compreendidas. Assim, o objetivo principal deste trabalho é explicar e aplicar uma interpretação combinatória para a sequência de Fibonacci a partir das ideias de ladrilhamentos. Para isso, os objetivos específicos são definir a sequência de Fibonacci, definir ladrilhamentos, provar a relação combinatória entre os ladrilhamentos e a sequência e, por último, provar algumas identidades com o uso do aspecto combinatório encontrado.

Alguns, provavelmente já viram provas de identidades de Fibonacci que usam indução. Enquanto uma prova por indução pode realizar seu propósito e ser logicamente correta, há uma falta de elegância na medida em que não dá ao estudante a intuição de por que a identidade é verdadeira. Em comparação, às provas via interpretação combinatória dos números de Fibonacci são muito mais concretas e satisfatórias.

1 Fundamentação Teórica

1.1 Aspectos históricos

Nascido por volta de 1170 na família Bonacci de Pisa, Leonardo de Pisa era filho do próspero comerciante Guglielmo, que procurava fazer de seu filho um seguidor de seus passos (BOYER, 2012). Em razão disso, na ocasião em que Guglielmo foi nomeado representante financeiro de Pisa e de comerciantes italianos em Bugia, localizado na atual Argélia, por volta de 1190, considerou indispensável a inda de Leonardo. Boyer (2012) expressa que neste período, o jovem estudou com um professor muçulmano, que o apresentou ao sistema de numeração hindu-árabe, juntamente com os métodos de computação hindu-árabe. Enquanto continuava sua vida no negócio mercantil, Leonardo deparou-se viajando para Constantinopla, Egito, França, Grécia, Roma e Síria, onde continuou a investigar os vários sistemas aritméticos que estavam sendo usados. Consequentemente, ao retornar para casa em Pisa, por volta de 1200, Leonardo se viu um defensor da simplicidade elegante e da vantagem prática do sistema de números hindu-árabe - especialmente quando comparado ao sistema de numeração romano usado na Itália - (EVES, 2011) . Como resultado, na época de sua morte, por volta de 1240, os comerciantes italianos começaram a reconhecer o valor do sistema numérico hindu-árabe e gradualmente começaram a usá-lo para transações comerciais. No final do século XVI, a maior parte da Europa havia se ajustado ao sistema Boyer (2012).

Em 1202, Fibonacci publicou sua obra-prima pioneira, o *Liber Abaci (O Livro de Cálculo ou O Livro do Ábaco)*, um dos responsáveis pela introdução do sistema numérico hindu-árabe e de seus algoritmos aritméticos no continente Europeu (EVES, 2011). Fibonacci iniciou seu trabalho com a introdução dos números hindu-árabes: as nove figuras hindus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, juntamente com a figura 0, que os árabes chamavam de "zephyrum". Em seguida, ele abordou a questão de um sistema de valores de posição para os números inteiros. À medida que o texto avança, vários tipos de problemas são abordados, incluindo um que usufruía de sistemas lineares determinados e indeterminados de equações com mais de dois valores desconhecidos e outro com manipulações de números perfeitos (ou seja, um número inteiro positivo cujo valor é igual à soma dos valores de todos os seus divisores, menos que ele próprio – por exemplo, $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$) – . Escondido discretamente entre esses dois tipos de problemas, está o único problema que tantos parecem conhecer, o notório "Problema dos Coelhos" (SIGLER, 2017).

Antes de continuar, mencionemos que, embora Leonardo seja mais conhecido pelo *Liber Abaci*, ele também publicou três outros trabalhos importantes. A *Practica Geometriae* (Prática da Geometria) foi escrita em 1220, a *Flos* (Flor ou Florescer) foi publicada em

1225, assim como o *Liber Quadratorum* (O Livro dos Números Quadrados). O último trabalho estabeleceu Leonardo como um renomado teórico dos números (SIGLER, 2017; EVES, 2011).

1.2 O problema dos coelhos

Segundo Boyer (2012), no livro *Lider Abaci*, capitulo 12, com o famoso Problema dos Coelhos, Fibonacci nos apresenta uma pessoa que tem um par de coelhos recém-nascidos – um de cada gênero – . Estamos interessados em determinar o número de pares de coelhos que podem ser criados em um ano, a contar pelo par inicial, de modo que

a) cada par de recém-nascido, uma fêmea e um macho, amadurece em um mês e depois começa a procriar;
b) dois meses após o nascimento, e todos os meses depois, um par, agora maduro, se reproduz no início de cada mês. Isto resulta no nascimento de um par (recém-nascido), uma fêmea e um macho, no final desse mês;
c) nenhum coelho morre durante o curso do ano.

Se começarmos a examinar essa situação no primeiro dia de um ano civil, encontraremos os resultados na Quadro 1 na página 12.

Lembre-se que, no final de cada mês, um par recém-nascido (nascido no final do mês) cresce até a maturidade, independentemente do número de dias – seja 28, 30 ou 31 – no próximo mês. Isso significa que pares de coelhos maduros em um determinado mês é a quantidade de maduros do mês anterior mais a quantidade de recém-nascidos do mês anterior. Além disso, como cada par maduro produz um par de recém-nascidos no final do mês, os recém-nascidos para um determinado mês é igual aos maduros do mês anterior. Da terceira coluna da Quadro 1, vemos que no final do ano, a pessoa que começou com esse par de coelhos recém-nascidos agora tem um total de 233 pares de coelhos, incluindo o par inicial.

Essa sequência é frequentemente chamada de *sequência de Fibonacci*. O nome *Fibonacci* é uma contração de *Filius Bonaccii*, a forma latina de “filho de Bonaccio”, e o nome foi dado à sequência em maio de 1876 pelo renomado teórico francês dos números *François Edouard Anatole Lucas* (pronuncia-se Lucah) (1842–1891) (SIGLER, 2017). Na realidade, Fibonacci não foi o primeiro a descrever a sequência, mas a publicou no *Liber Abaci*, que a introduziu no Ocidente.

A sequência de Fibonacci prova ser uma das sequências numéricas mais intrigantes e onipresentes de toda a Matemática. Infelizmente, a maioria dos estudantes de Matemática estão cientes, apenas, da conexão entre esses números com a recorrências ou com o “Problema dos Coelhos”. No entanto, como logo verá, essa sequência tem algumas propriedades

Quadro 1 – Crescimento de casais de coelho

	Pares de coelhos recém-nascidos	**Pares de coelhos maduro**	**Pares de coelhos Total**
Começo Janeiro	1	0	1
Um mês depois Fevereiro	0	1	1
Dois meses depois Março	1	1	2
Três meses depois Abril	1	2	3
Quatro meses depois Maio	2	3	5
Cinco meses depois Junho	3	5	8
Seis meses depois Julho	5	8	13
Sete meses depois Agosto	8	13	21
Oito meses depois Setembro	13	21	34
Nove meses depois Outubro	21	34	55
Dez meses depois Novembro	34	55	89
Onze meses depois Dezembro	55	89	144
Um ano depois Janeiro	89	144	213

Fonte: (AUTOR,2019)

combinatórias fascinantes.

1.3 Perfil de recorrência

Ao examinar a sequência na coluna do meio da Quadro 1, vemos que após os dois primeiros pares, cada par é a soma dos dois valores anteriores. Por exemplo, $1 = 1 + 0, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, ..., 55 = 34 + 21$, etc. Portanto, podemos determinar números posteriores na sequência quando conhecemos os valores dos números anteriores.

Essa propriedade agora nos permite definir o que consideraremos daqui em diante como os *números de Fibonacci*. Consequentemente, a sequência dos números de Fibonacci é definida, recursivamente, da seguinte maneira:

Definição 1 (Sequência de Fibonacci)**.** *Para todo $n \geq 0$, o n-ésimo número de Fibonacci, F_n, é definido pela recorrência*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

como temos iniciais[1] $F_0 = 0$ *e* $F_1 = 1$.

Portanto, a sequência $F_0, F_1, F_2, F_3, ...$, que aparece na coluna do meio da Quadro 1, agora possui um ponto de partida diferente, a saber F_0, da sequência $F_1, F_2, ...$, que aparece na terceira coluna da Quadro 1. Esta sequência, $F_0, F_1, F_2, F_3, ...$, agora é aceita como a definição padrão para a sequência dos números de Fibonacci. É um dos primeiros exemplos de uma sequência recursiva em Matemática. Muitos acham que Fibonacci estava indubitavelmente ciente da natureza recursiva desses números. No entanto, foi somente em 1634, quando a notação matemática havia progredido suficientemente, que o matemático holandês *Albert Girard* (1595-1632) escreveu a fórmula em seu trabalho publicado postumamente *L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges*.

Usando a definição recursiva acima, encontramos os 25 primeiros números de Fibonacci na Quadro 2.

Quadro 2 – 25 primeiros números de Fibonacci

$F_0 = 0$	$F_5 = 5$	$F_{10} = 55$	$F_{55} = 610$	$F_{20} = 6765$
$F_1 = 1$	$F_6 = 8$	$F_9 = 89$	$F_{16} = 987$	$F_{21} = 10946$
$F_2 = 1$	$F_7 = 13$	$F_{12} = 144$	$F_{17} = 1597$	$F_{22} = 17711$
$F_3 = 2$	$F_8 = 21$	$F_{13} = 273$	$F_{18} = 2584$	$F_{23} = 28657$
$F_4 = 3$	$F_9 = 34$	$F_{14} = 377$	$F_{19} = 4181$	$F_{24} = 46368$

Fonte: (AUTOR,2019)

1.4 O tabuleiro

Serão definidos nesta sessão alguns objetos que serão usados como ferramentas para este trabalho.

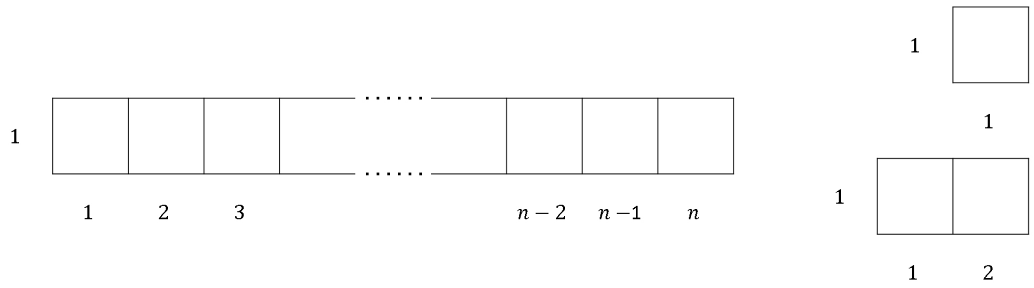
Definição 2 (Tabuleiro)**.** *O tabuleiro é uma formação de quadrados denominados por casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essa enumeração descreve a*

[1] Muitas vezes é mais conveniente considerar a sequência de Fibonacci começando com $F_0 = 0$. Vale salientar que no *Liber Abaci* a sequência se inicia com $F_1 = 1$

posição. Um tal tabuleiro será chamado apenas de $n-tabuleiro$ (SPREAFICO, 2014). Veja a Figura 1.

Existem dois tipos de tabuleiros. O tabuleiro finito que possui apenas uma quantidade finita de casas e o tabuleiro infinito que possui um número infinito de casas. Por conveniência, neste trabalho usaremos o primeiro tipo que é da forma $1 \times n$ com suas posições numeradas de 1 a n, ou ainda 0 a $n-1$.

Figura 1 – Um $n-$*tabuleiro* numerado e duas peças, o quadrado e dominó



Fonte: (AUTOR,2019)

Definição 3 (Peças)**.** *Denominamos peças ou ladrilhos os objetos que usamos para preencher ou cobrir um $n-tabuleiro$ de dimensões $1 \times k$, $1 \leq k \leq n$ (SPREAFICO, 2014).*

Neste trabalho utilizaremos somente duas peças, o *quadrado* de formato 1×1 e *dominó* de formato 1×2 (Figura 1). Agora que temos as peças, podemos então preencher um tabuleiro com certa quantidade e tipos de peças.

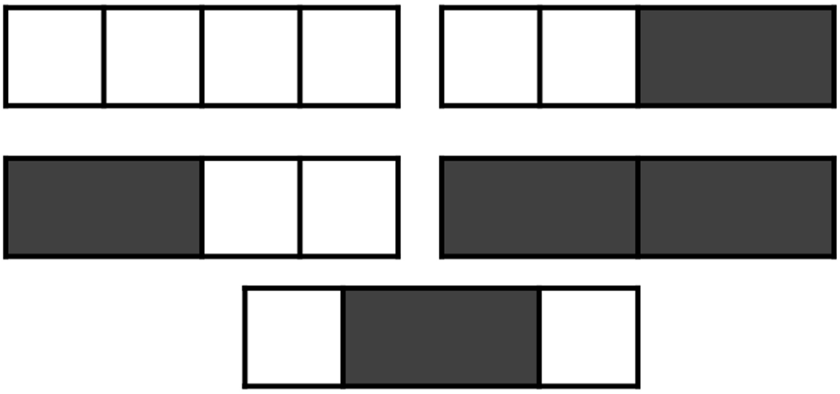
Definição 4 (Ladrilhamento)**.** *Dado um tabuleiro e determinadas peças, chamamos de ladrilhamento a uma maneira de cobrir completamente o tabuleiro com as peças, sem que reste qualquer célula não preenchida e sem que peças se sobreponham (GRAÇA NETO, 2017).*

O problema em questão é: dado $n \geq 1$, quantas ladrinhamentos de um $n-tabuleiro$ existem usando apenas quadrados e dominós? Para facilitar usamos apenas a palavra "ladrilhamento", para dizer "coberturas usando quadrados e dominós". Por exemplo, existem 5 ladrilhamentos para um 4-tabuleiro. Veja a Figura 2.

1.5 Fibonacci e os Ladrilhamentos

Os números de Fibonacci podem se interpretados de forma combinatória como o número de ladrilhamento de um $n-$*tabuleiro*.

Figura 2 – As 5 possíveis coberturas de um $4-tabuleiro$



Fonte: (AUTOR,2019)

Definição 5 (Número de ladrilhamentos). *Para todo $n \geq 0$, definimos $f_0 = 1$ e f_n como o número de ladrilhamentos de um $n - tabuleiro$.*

Por exemplo, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$,$f_3 = 3$ e $f_4 = 5$. Observe que esses são os primeiros valores positivos e distintos da sequência de Fibonacci. O próximo resultado nos diz que, na verdade, essas sequências são iguais a menos de uma mudança de índices.

Teorema 1 (Benjamin e Quinn (2003)). *Seja f_n o número de ladrilhamentos de um $n - tabuleiro$, defina $f_{-1} = 0$ e $f_0 = 1$. Então*

$$f_n = F_{n+1}, n \geq -1.$$

Demonstração. Repare que às duas "sequências" precisam ter a mesma condição inicial e ter a mesma relação de recursão.

Como $f_{-1} = 0 = F_0$ e $f_0 = 1 = F_1$, então temos as condições iniciais satisfeitas.

Para ver que a relação satisfaz a recursão de Fibonacci (Definição 1), note que o único ladrilhamento para um tabuleiro 1×1 é um quadrado, então $f_1 = 1 = F_2$. Agora, considere a última peça do n-tabuleiro. A última posição é um quadrado ou um dominó.

a) Se o tabuleiro terminar com um quadrado, haverá f_{n-1} ladrilhamentos para um $(n-1) - tabuleiro$.

b) Se o tabuleiro terminar com um dominó, haverá f_{n-2} ladrilhamentos para um $(n-2) - tabuleiro$.

Para calcular o número total de maneiras de ladrilhamentos um $n - tabuleiro$, somamos esses dois casos. Isso é,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Como f_n satisfaz a mesmas condições iniciais e a mesma relação recursão que F_{n+1}, então $f_n = F_{n+1}$, para todo $n \geq -1$. $\square$

Repare que f_n é uma sequência de Fibonacci deslocada por um termo. Pensarmos nos números de Fibonacci como ladrilhamentos de um $n-tabuleiro$ nos permitirá provar identidades interessantes da sequência de Fibonacci, que normalmente exigiriam técnicas de indução e manipulação algébrica para serem provadas. Porém muitas dessas técnicas não revelam, ainda, o porque da validade dessas identidades.

2 Metodologia

2.1 Abordagem Metodológica

Em conformidade com os objetivos pretendidos por este trabalho, desenvolve-se as definições, teoremas, identidades ou qualquer forma de argumentação matemática mediante a metodologia embasada em um estudo quantitativo e bibliográfico, utilizando, teses, artigos, sites e principalmente livros.

A pesquisa bibliográfica conforme Gil (2002):

> [...] é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo.(GIL, 2002, p. 44)

Como citado anteriormente, á provas deste trabalho são originadas de problemas contábeis – enumerar de duas maneiras diferentes –. Dado isso, uma dificuldade se revela nos procedimentos das demonstrações, pois elas necessitam de algumas ideias subjetivas, como as posições dos ladrilhamentos, a ideia de tabuleiro (visto que vincula-se com a já conhecida pelo leitor), o princípios de contagens, etc. Para contornando esta dificuldade, a pesquisa caracteriza-se pelo uso do método dedutivo:

> O método dedutivo, de acordo com a acepção clássica, é o método que parte do geral e, a seguir, desce ao particular. Parte de princípios reconhecidos como verdadeiros e indiscutíveis e possibilita chegar a conclusões de maneira puramente formal, isto é, em virtude unicamente de sua lógica. E o método proposto pelos racionalistas (Descartes, Spinoza, Leibniz), segundo os quais só a razão é capaz de levar ao conhecimento verdadeiro, que decorre de princípios a priori evidentes e irrecusáveis. O protótipo do raciocínio dedutivo é o silogismo, que consiste numa construção lógica que, a partir de duas preposições chamadas premissas, retira uma terceira, nelas logicamente implicadas, denominada conclusão. Seja o exemplo:
>
> Todo homem é mortal, (premissa maior)
>
> Pedro é homem, (premissa menor)
>
> Logo, Pedro é mortal, (conclusão). (GIL, 2002, p. 9)

Assim sendo, várias propriedades no âmbito das pesquisas matemáticas são apresentadas por meio de um raciocínio logico e dedutivo a partir de conceitos e proposições já existentes. Neste trabalhos, apesar do uso da definições beneficiarem o entendimento, são reconhecidas como verdadeiras as ideias de contagem na abordagem visual e as posições dos ladrilhamentos.

2.2 Instrumentos de Coleta de Dados

Visando à busca de conhecimentos teóricos para demonstrações de algumas identidades da sequência de Fibonacci foram usadas obras como *Fibonacci and Lucas numbers with applications* (KOSHY, 2001), *Bijective Combinatorics: Discrete Mathematics and Its Application* (LOEHR, 2011), *Introdução à Análise Combinatória* (SANTOS; MELLO; MAURARI, 2007), *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro* (ZAHN, 2011), , e principalmente o livro *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof* (BENJAMIN; QUINN, 2003).

2.3 Etapas

As identidades de Fibonacci em muitos livros aparecem de formas não detalhadas, isto é, são apenas apresentadas sem suas respectivas demonstrações. Muitos, mesmo demonstrando as identidades não os fazem de forma que o leitor visualize aquilo como consequência das propriedades e características da sequência. Por isso, o requisito principal a ser atendido foi buscar bibliografias que não somente apresentem as identidades, mas que as demonstrem de forma consistente e, se possível, com o uso de contagem.

O trabalho realizado nesta dissertação possui três etapas fundamentais: i) a pesquisa de bibliografias condizentes com o perfil do trabalho; ii) A separação do material que auxiliará na construção das identidades/propriedades; iii) Análise matemática de modos de demonstrações que visem a visualização direta de um objeto combinatório.

Na primeira etapa, pesquisaram-se os principais livros, artigos ou sites, que abordassem a sequência de Fibonacci e que tratasse dos estudos de combinatória. A discussão do trabalho fundamentou-se na literatura pesquisada, todo o arcabouço aqui apresentado esta fundamentada nas bibliografias e obviamente alguns casos a Matemática dedutiva, como já citado anteriormente, aparece para simplificar o objetivo do trabalho.

Na segunda etapa, utilizou-se a discussão do material a ser abordado. Procurou-se mapear as principais características combinatórias presentes nas literaturas, as formas de apresentação das sequências e como os demais assuntos seriam apresentados neste trabalho.

Na terceira etapa, ocorreu uma discussão da proposta apresentada no trabalho, com a seguinte pergunta primordial; “como demostrar as identidades/propriedades de forma combinatória e clara?”. Decidiu-se então adotar os métodos de demonstrações diretas. Tirando algumas exceções, seguem-se as seguintes etapas; definindo um conjunto e contando a quantidade de duas formas diferentes (como fizemos no exemplo da introdução) ou provando uma correspondência entre dois conjuntos diferentes.

3 Provas das Identidades

Este capítulo é dedicado a demonstrar algumas identidades dos números de Fibonacci. Por conveniência combinatória, expressaremos a maioria de nossas identidades em termos de f_n em vez de F_n. Usamos principalmente as definições de ladrilhamento fornecidas aqui.

3.1 Identidade dos Números de Fibonacci

A primeira identidade foi descoberta por *Edouard Lucas* em 1876 (SILVA, 2017). Por meio da Algumas observações sugerem o resultado geral:

$$F_0 + F_1 + F_2 = 2 = 3 - 1 = F_4 - 1$$
$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 = 4 = 5 - 1 = F_5 - 1$$
$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = 8 - 1 = F_6 - 1$$

Identidade 1. *Para todo $n \geq 0$,*

$$\sum_{r=0}^{n} f_r = f_{n+2} - 1.$$

Demonstração. Para provar essa identidade, conta-se de duas maneiras diferentes os ladrilhamentos de um $(n+2) - \textit{tabuleiro}$. Mais precisamente, queremos saber quantos ladrilhamentos de $(n+2) - \textit{tabuleiro}$ possui pelo menos um dominó?

Pela Definição 5, para um $(n+2)$-tabuleiro, existem f_{n+2} ladrilhamentos, porém, um não contém dominó, é o caso que tem apenas quadrados. Então, contendo pelo menos um dominó tem-se $f_{n+2} - 1$ ladrilhamentos.

A segunda maneira de contar é pensando onde se encontra o último dominó.

a) Se estiver na posição $(n+1, n+2)$, então existe f_n ladrilhamentos no $n - \textit{tabuleiro}$.

b) Se estiver na posição $(n, n+1)$, haverá um quadrado na posição $(n+2)$, então existe f_{n-1} ladrilhamentos no $(n-1) - \textit{tabuleiro}$.

c) Se estiver na posição $(n-1, n)$, haverá dois quadrados na posição $(n+2)$ e $(n+1)$, então existe f_{n-2} ladrilhamentos no $(n-2) - \textit{tabuleiro}$.

Prosseguindo dessa maneira, observamos que quando o último dominó estiver na posição $(1, 2)$, então haverá f_0 ladrilhamentos (pois, haverá um dominó na primeira peça e o restante serão quadrados). Portanto, somando cada situação temos

$$f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + \ldots + f_1 + f_0$$

provando a identidade. Veja a figura Figura 3. □

Identidade 2. *Para todo* $n \geq 0$, $f_0 + f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1}$

Demonstração. Pela Definição 5 existem f_{2n+1} ladrilhamentos de um $(2n+1) - tabuleiro$. Por outro lado, como existe uma quantidade ímpar de posições, então todo ladrilhamento deve conter pelo menos um quadrado. Vejamos os casos para o último quadrado:

a) Se último quadrado está na posição $(2n+1)$, existem f_{2n} coberturas para o $(2n) - tabuleiro$ restante.

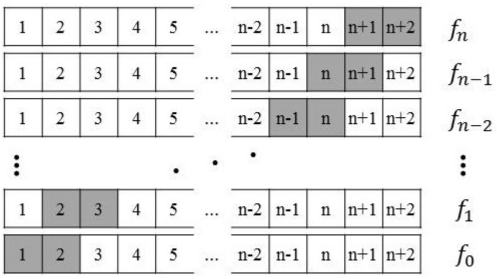
b) Se o último quadrado está na posição $(2n-1)$, haverá um dominó na posição $(2n, 2n+1)$, assim f_{2n-2} coberturas para o $(2n-2) - tabuleiro$ restante.

Prosseguindo com esse raciocínio, se o último quadrado tiver na posição 1 haverá f_0 ladrilhamentos (pois, haverá um quadrado na primeira peça). Portanto, somando cada caso, obtemos

$$f_{2n} + f_{2n-2} + ...f_2 + f_0$$

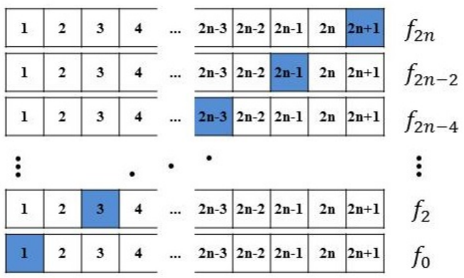
ladrilhamentos para um $(2n+1) - tabuleiro$, provando a identidade. Veja a Figura 4. □

Figura 3 – Cobertura do $(n+2) - tabuleiro$ com localização do dominó(cinza).



Fonte: (AUTOR,2019)

Figura 4 – Cobertura do $(2n+1) - tabuleiro$ com localização do quadrado(azul)



Fonte: (AUTOR,2019)

Definição 6 (Ladrilhamento quebrável e inquebrável)**.** *Um ladrilhamento de um* $n - tabuleiro$ *é quebrável na posição* k *se puder ser dividido em dois ladrilhamentos, um cobrindo as posições de* 1 *até* k*, e outro cobrindo as posições* $k+1$ *até* n*. Caso contrário, dizemos que o ladrilhamento é inquebrável em* k*.*

Em outras palavras, um ladrilho é quebrável em k, desde que não haja um dominó nas posições k e $k+1$. Daqui resulta que um ladrilhamento é sempre quebrável na posição k ou na posição $k-1$. Essa definição nos permite separar os ladrilhamentos em dois casos: quando o o tabuleiro é quebrável na posição k, e quando há um dominó cobrindo as posições k e $k+1$.

Agora vamos estabelecer outra propriedade para os números de Fibonacci, novamente usando um argumento combinatório. Em vez de simplesmente anotá-la e tentar prová-la, vamos listar alguns resultados que motivam a propriedade. Para $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= F_2F_{n+1} + F_1F_n \\
F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} \\
&= 2F_{n+1} + 1F_n \\
&= F_3F_{n+1} + F_2F_n \\
F_{n+4} &= F_{n+3} + F_{n+2} \\
&= (2F_{n+1} + 1F_n) + (F_{n+1} + F_n) \\
&= 3F_{n+1} + 2F_n \\
&= F_4F_{n+1} + F_3F_n \\
F_{n+5} &= F_{n+4} + F_{n+3} \\
&= (3F_{n+1} + 2F_n) + (2F_{n+1} + 1F_n) \\
&= 5F_{n+1} + 3F_n \\
&= F_5F_{n+1} + F_4F_n
\end{aligned}$$

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, m \geq 1, n \geq 1.$$

Identidade 3. *Para* $m, n \geq 0$, $f_{m+n} = f_mf_n + f_{m-1}f_{n-1}$

Demonstração. Contemos os ladrilhamentos de um $(m + n) - tabuleiro$ de duas maneiras diferentes.

Pela Definição 5 , o número de maneiras de formar um $(m + n) - tabuleiro$ é f_{m+n}.

Separamos os ladrilhamentos de um $(m + n) - tabuleiro$ em dois casos com base no fato do ladrilhamento na posição m ser ou não quebrável.

a) Se for quebrável na posição m, nós a dividimos em dois tabuleiros, um $m - tabuleiro$ Figura 5 e outro de $n - tabuleiro$ $(m + 1$ à $m + n)$. Por definição, existem f_m maneiras de ladrilhar o primeiro tabuleiro e f_n maneiras o segundo, logo pelo PFC [1] temos f_mf_n maneiras possíveis.

b) Se for inquebrável na posição m, há um dominó na posição $(m, m+1)$, e é quebrável em $(m - 1)$ e $(m + 2)$ Figura 6. Vamos então remover o dominó, o que nos deixa

[1] Princípio Fundamental da Contagem (SANTOS; MELLO; MAURARI, 2007) e (LOEHR, 2011)

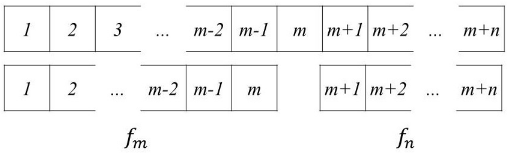
com dois tabuleiros, um $(m-1)-tabuleiro$ e outro $(n-1)-tabuleiro$. Usando novamente o PFC, temos $f_{m-1}f_{n-1}$ maneiras de ladrilhar.

Resumindo os dois casos, concluímos que existem

$$f_m f_n + f_{m-1}f_{n-1}$$

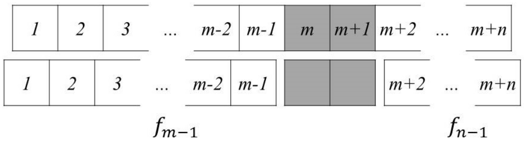
maneiras de ladrilhar um $(m+n)-tabuleiro$. Uma vez que às duas maneiras contam o número de ladrilhamentos do mesmo tabuleiro concluímos o que queríamos provar. $\square$

Figura 5 – Ladrilho quebrável em m.



Fonte: (AUTOR,2019)

Figura 6 – Ladrilho inquebrável em m.



Fonte: (AUTOR,2019)

Para próxima identidade precisamos apenas lembrar que o número binomial $\binom{n}{k}$ é a possíveis escolhas de k objetos dentre n objetos. Também, $\binom{n}{k}$=0, se $k \geq n$ (LOEHR, 2011).

Identidade 4. *Para todo* $n \geq 0$, *temos que* $f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + ... + \binom{n-k}{k}$

Demonstração. Existem f_n coberturas para um $n-tabuleiro$. Para contarmos a mesma quantidade, analisaremos os casos de ladrilhamentos que possuem exatamente k dominós.

Quantos ladrilhamentos de $n-tabuleiro$ possui exatamente k dominós? Para que a resposta seja diferente de zero, precisamos ter $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Tais ladrilhamentos necessariamente usam $(n-2k)$ quadrados.

Modelemos agora a quantidade k como uma única posição, ou seja, os dominós que aparecem em um ladrilhamento, agora, são apenas uma posição. Por exemplo, se $k = 10$

temos então 10 posições no lugar de 10 dominós. E, portanto, usam um total de $(n-k)$ ladrilhos. Repare que o problema passa a ser apenas as maneiras de escolher k elementos dentre $n-k$.

O número de maneiras de selecionar k desses $n-k$ pasições para serem dominós é $\binom{n-k}{k}$. Portanto, existem

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+...+\binom{n-k+1}{k+1}+\binom{n-k}{k},$$

isto é,

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n-k}{k}=f_n$$

. □

Outra técnica que é útil para provar as identidades dos números de Fibonacci é chamada *troca de cauda*. O primeiro passo na troca de cauda é colocar os dois $n-tabuleiros$, de modo que a segundo tabuleiro comece uma posição a direita do primeiro. Então olhamos para onde cada posição é quebrável. Especificamente, estamos interessados em saber onde esses intervalos se alinham.

Considere dois ladrilhamentos de $n-$ *tabuleiros* ja deslocados em uma posição. O primeiro com casas numeradas de 1 a n e o segundo com casas numeradas de 2 a $n+1$.Dizemos que existe uma falha na posição i se ambos ladrilhamentos são quebráveis na posição i. Em outras palavras, nenhuns dos ladrilhamentos possuem um dominó na posição i.

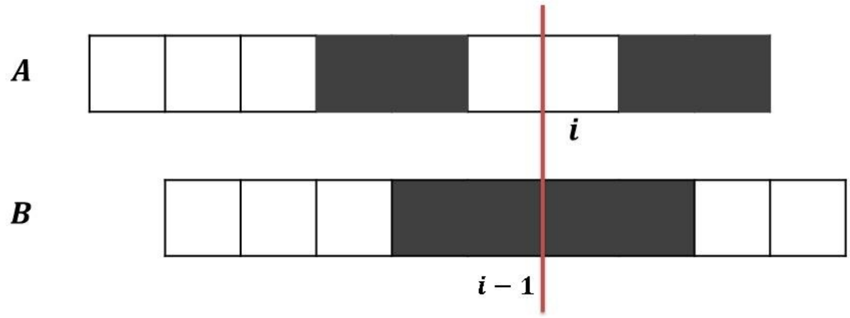
Assim podemos atribuir algumas consequências antes de dar continuidade:

a) Existe apenas uma maneira de evitar que uma falha ocorra. Cobrir ambos os tabuleiros apenas com dominós.

b) Enquanto uma das placas tiver pelo menos um quadrado, haverá uma falha. Para ver isto, considere dois ladrilhamentos, A e B, posicionados como na Figura 7, e suponha que o ladrilhamento A tenha um quadrado na posição i. Então, por definição, o ladrilhamento A é quebrável na posição i ou na posição $i-1$. Agora, considere o ladrilhamento B. Existem dois casos: o ladrilhamento B é quebrável na posição i ou não é quebrável na posição i. Se B não é quebrável na posição i, tem um dominó nas posições i e $i+1$ e, portanto, é quebrável no ladrilho $i-1$. No primeiro caso, temos uma falha na posição i, e na segunda temos uma falha na posição $i-1$. O ladrinhamento após esta última falha é o que consideramos a calda.

Definição 7 (Caudas de tabuleiros)**.** *As caudas de um par de tabuleiros ladrilhados são as peças que ocorrem após a última falha.*

Figura 7 – Dois ladrilhos colocados em conjunto, de modo que o segundo comece uma posição à direita



Fonte: (AUTOR,2019)

Depois que identificamos as caudas nos tabuleiros, resta trocá-las, criando um $(n+1)-tabuleiro$ e outro de $(n-1)-tabuleiro$. Para prova a identidade abaixo usaremos a troca de cauda.

Identidade 5. *Para todo* $n \geq 0$, $f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n$.

Demonstração. Conta-se os números de ladrilhamentos de um par n-tabuleiros, com o segundo deslocado uma posição à direita, de duas forma diferentes.

a) **Lado esquerdo da igualdade:** Pela Definição 5 existem f_n maneiras de ladrilharmos o primeiro $n - tabuleiro$ e f_n maneiras de ladrilharmos o segundo tabuleiro. Uma vez que, tais ladrilhamentos são independentes um do outro. Pelo PFC, o número de maneiras de ladrilharmos dois tabuleiros de ordem n é f_n^2.

b) **Lado direito da igualdade:** Coloque dois tabuleiros como mostrado na Figura 7. Vamos considerar dois casos: quando n **é par** e quando n **é impar**.

   – **Se** n **é par**, quando os dois ladrilhamentos são todos dominós não há falha, isto é, não poderemos trocar a suas caudas (consequência do Item a)). Em todos os outros casos, os ladrilhamentos tem pelo menos um quadrado e, portanto, temos uma falha garantida (consequência do Item b)). Após a última falha, trocamos as caudas do tabuleiro. Agora temos dois pares de $(n+1) - tabuleiro$ e $(n-1) - tabuleiro$. Novamente, pelo PFC temos $f_{n+1}f_{n-1}$ maneiras de ladrilharmos este par, então, adicionando o caso quando ambos tabuleiros estão usando todos os dominós, existem $f_{n+1}f_{n-1} + 1$ maneiras de ladrilharmos dois n-tabuleiros sendo n par.

   – **Quando** n **é ímpar**, não existem em f_n^2 a situação de termos um ladrilhamento completamente preenchido por dominós. Porém, sendo n ímpar cada tabuleiro tem pelo menos um quadrado, portanto há pelo menos uma falha (consequência do Item b)). Trocando as caudas dos tabuleiros após a última falha, temos dois

$(n+1) - tabuleiro$ e $(n-1) - tabuleiro$ com números pares, e agora há a possibilidade de preenchermos ambos por dominós, que ao contarmos a quantidade de ladrilhamentos possíveis temos $f_{n+1}f_{n-1}$. Para excluir as possibilidade do ladrilhamento preenchido completamente por dominós, subtraindo este caso. Portanto, existem $f_{n+1}f_{n-1} - 1$ maneiras de ladrilhar um par de n-tabuleiros, quando n é impar.

Como o caso de n ser ímpar ou n ser par cotam a mesma quantidade (LOEHR, 2011), Então

$$f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n.$$

$\square$

Considerações finais

Neste trabalho, foi fornecida uma interpretação combinatória para a sequência de Fibonacci. Esta não apenas permite viabilizar provas combinatórias de identidades anteriores mostradas, mas também estabelecer novas. Além disso, o raciocínio combinatório fornece uma maneira de descobrir novas identidades, algumas das quais podem ser mais difíceis de encontrar por meios puramente algébricos. Também fizemos uso de nossa interpretação combinatória demonstrada por Benjamin e Quinn (2003) para definir algumas consequências. Os resultados deste trabalho podem ser estendidos uma vez que tal interpretação tomada de forma apropriada gera varias consequências interessantes.

As técnicas apresentadas aqui são simples, mas poderosas. Contar ladrilhamentos de tabuleiros nos permite visualizar as relações entre os números de Fibonacci e suas generalizações. Essa abordagem facilita uma compreensão mais clara das identidades existentes e pode ser estendida de várias maneiras. Ao introduzir tabuleiros de vários comprimentos, podemos interpretar sequências geradas por recorrências lineares com coeficientes constantes (BENJAMIN; HANUSA; SU, 2003). Ao permitir que alguns quadrados de nossos ladrilhos sejam empilhados até uma certa altura, podemos interpretar de maneira combinatória as frações contínuas simples (BENJAMIN; SU; QUINN, 2000). Ao introduzir um elemento de aleatoriedade, mesmo a *fórmula Binet* de aparência irracional

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

podem ser racionalizada (BENJAMIN et al., 2000).

Para indicar o poder desta abordagem, o livro *Fibonacci and Lucas numbers with applications* de Koshy (2001) contêm várias identidades envolvendo os números de Fibonacci. Essas identidades são comprovadas por uma infinidade de métodos algébricos – indução, funções geradoras, funções hiperbólicas, etc –. Embora nenhum seja provado no livro, usamos os ladrilhos para explicar grande parte dessas identidades. Deixo aqui uma das identidades mais tentadoras que até agora resistiram às explicações combinatórias.

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} f_{2i-1} = 5^n f_{2n-1}$$

Referências

BENJAMIN, A. T.; HANUSA, C. R.; SU, F. E. Linear recurrences through tilings and markov chains. *Utilitas Mathematica*, Winnipeg: University of Manitoba, Department of Computer Science, 1972-, v. 64, p. 3–18, 2003.

BENJAMIN, A. T. et al. Random approaches to fibonacci identities. *The American Mathematical Monthly*, Taylor & Francis, v. 107, n. 6, p. 511–516, 2000.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. 1. ed. Washington, D.C, 2003.

BENJAMIN, A. T.; SU, F. E.; QUINN, J. J. Counting on continued fractions. *Mathematics Magazine*, Taylor & Francis, v. 73, n. 2, p. 98–104, 2000.

BOYER, C. B. História da matemática,1976. *Tradução de Helena Castro*, São Paulo, 2012.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 4. ed. Campinas, 2011.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo, 2002.

GRAÇA NETO, A. C. *Propriedades aritméticas e combinatórias de uma generalização a quatro parâmetros de sequências de números especiais*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, IMECC, São Paulo, 2017. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/324306>.

KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. 1. ed. New York, 2001.

LOEHR, N. *Bijective Combinatorics: Discrete Mathematics and Its Applications*. 1. ed. Virginia, 2011.

SANTOS, J. P. O. D.; MELLO, M. P.; MAURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. 4. ed. Rio de Janeiro, 2007.

SIGLER, L. *Fibonacci's Liber Abaci : A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. 1. ed. Nova York, 2017.

SILVA, B. A. *Números de Fibonacci e Números de Lucas: Um estudo de suas principais identidades matemáticas*. 3. ed. São Paulo, 2017.

SPREAFICO, E. V. P. *Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, IMECC, São Paulo, 2014. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/307509>.

ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. 1. ed. Rio de Janeiro, 2011.