**Universidade do Estado do Amazonas**

**Escola Normal Superior**

**Licenciatura em Matemática**

# O Teorema de Stolz-Cesàro e Suas Aplicações

Ademir Martins de Oliveira

**Manaus-AM**

**2019**

Ademir Martins de Oliveira

# O Teorema de Stolz-Cesàro e Suas Aplicações

Trabalho apresentado na Universidade do Estado do Amazonas como requisito parcial para obtenção da graduação de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Almir Cunha da graça Neto
Coorientador: Professor Me. Alessandro Monteiro de Menezes

**Manaus-AM**
**Novembro/2019**

# Folha de Aprovação

GOVERNO DO ESTADO DO
**AMAZONAS**

**ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de ADEMIR MARTINS DE OLIVEIRA

**Aos 27 dias do mês de novembro de 2019**, às 20:00 horas, em sessão pública na Sala Jacobede da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pela professora da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Me. Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Dr. Almir Cunha da Graça Neto, Me. Rogério Jacinto de Moraes Junior e Me. Edson Lopes de Souza** o aluno **ADEMIR MARTINS DE OLIVEIRA** apresentou o Trabalho: **"O TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO E SUAS APLICAÇÕES"** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,8 à monografia divulgando o resultado ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata.

Helisângela Ramos da Costa
Presidente da Banca Examinadora

Almir Neto
Orientador (a)

Edson Lopes de Souza.
Avaliador 1

Rogério Jacinto de Moraes Júnior
Avaliador 2

Ademir Martins de Oliveira
Aluno

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
Escola Normal Superior
Av. Djalma Batista, Nº 2470, Chapada
CEP: 69050-010 / Manaus-AM
www.uea.edu.br

*Dedico este trabalho aos meus pais Nazareno e Mª das Graças e ao meu melhor amigo Mael Barbosa (In Memoriam).*

# Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por ter me dado força, fé e coragem para superar as adversidades.

Aos meus pais, Nazareno e Mª das Graças que se esforçaram para que eu me tornasse um homem íntegro.

À minha companheira, Nicole Baraúna por ter me ajudar sempre. Além de me fazer crescer, amadurecer e sonhar.

Aos meus amigos, Ernandes Dos Santos e Filipe Fortes que me ajudaram em todos os aspectos, sempre que precisei.Se eu me tornasse uma média aritmética, certamente, eles fariam parte da minha distribuição de frequências.

Ao Mael Barbosa*(In Memoriam)*, uma das pessoas mais incríveis que já conheci. É difícil escrever algo sobre você sem me emocionar muito. Vivemos muitos apertos e alegrias. Se $n$ é o tanto que você sente minha falta então eu sinto $n + 1$.

Aos meus orientadores, Almir Neto e Alessandro Monteiro, os quais se tornaram meus amigos, sempre estenderam a mão pra me ajudar. Além disso, são pessoas excepcionais, matemáticos notáveis e professores excelentes. Tenho muita admiração pelos dois.

E aos demais amigos que conheci no decorrer da faculdade, sei que nossos laços vão além deste curso. Obrigado, Anderson Malafaia, Débora Duarte, Júlio Barros, Francisco Leonardo, Lucas Santos, Francimar Santos, Joarlison Gonçalves, Marcelo Tavares, Tadeu Lobo e Romário Victor. Espero não ter esquecido de ninguém, e se esqueci saiba que eu fiz os agradecimentos por último e tô me sentindo pressionado pelos prazos a cumprir.

"Era uma questão de sorte e fiz ser uma questão de tempo."

Emicida

# Lista de Figuras

SUMÁRIO

# Introdução

Nos dias de hoje, vemos a Matemática muito presente em outras áreas do saber, tais como Engenharias, Medicinas, Arquitetura, Tecnologia e outros. Muitos conhecimentos que um dia foram estudos específicos na Matemática, hoje são aplicados em outros âmbitos.

Um assunto que passou por essa popularização foram as sequências numéricas, visto sua vasta aplicação para números irracionais, representações decimais, estimativas, estudos de fractais, progressões e esse último se tornou alvo de estudo até no ensino básico.

Avaliar o comportamento de uma sequência e analisar sua convergência nem sempre é uma tarefa simples. Em alguns casos, não conseguimos nem dizer para qual valor uma sequência está se aproximando quando procuramos um termo de posição arbitrariamente grande. Na intenção de ampliar esse estudo, são desenvolvidos estudos baseados em critérios que nos ajudam a analisar o comportamento de sequências, descobrindo se diverge ou converge, e em casos particulares, é possível saber disso mesmo sem conhecer para qual valor a sequência tende a se aproximar como, por exemplo,conseguimos afirmar que sequência converge apenas comparando com outras, baseando-se em restrições e semelhanças entre as sequências.

Diferente do estudo sobre séries que possui vários critérios para a análise de convergência, as sequências possuem seus estudos um pouco menos explorados.

Mas, um ponto em comum com as séries é a inexistência de um critério que seja dominante, que sirva para qualquer sequência. Considerando esses pontos, é fácil ver a importância de aumentar o conhecimento sobre critérios de convergência, principalmente, em testes mais refinados.

Pensando na necessidade de engrandecer o conhecimento acerca de critérios para o estudo de sequências numéricas com eficiência, este trabalho visa apresentar de maneira clara e coerente definições e conceitos de convergências já conhecidos. Além disso, complementar com o Teorema de Stolz-Cesàro e suas aplicações que são investidas a critérios de convergência de sequências como um teste mais sofisticado e com muita utilidade nas análises de comportamentos de sequências, muito explorado em Olimpíadas de Matemática. Dentre os objetivos específicos destacam-se: analisar o teorema de Stolz; buscar suas aplicações mais usuais e ampliar o estudo de sequências com um método numérico e eficaz.

# Capítulo 1

# Fundamentação Teórica

## 1.1 Aspectos Históricos

De acordo com Hans Niels Jahnke (2003), alguns problemas básicos envolvendo análise estavam presentes no estudo de geometria dos matemáticos gregos. Além de desenhar tangentes para curva, os gregos se engajavam de definir e determinar comprimentos, áreas, volumes e centros de gravidades. O estudo da Análise Matemática como conhecemos hoje em dia, só se formalizou no século XVII, período no qual ocorreu a revolução científica, onde cientistas desvincularam a ciência da teologia, entretanto esses estudos já se manifestavam de maneiras específicas desde os primórdios da humanidade.

É possível encontrar conceitos, de modo implícito, como infinito, limite e convergência de séries nos estudos do filósofo e matemático pré-socrático Zenão de Eleia, autor do Paradoxo de Aquiles. Logo em seguida, Arquimedes baseado num estudo aprimorado por Eudoxo Cnido, chamado por método de Exaustão, trabalhou com ideias de limites, convergência e integral para calcular área de figuras utilizando polígonos que se assemelham e aproximam infinitamente. Sendo que, o mesmo fora autor do primeiro estudo datado sobre infinitesimais. É possível perceber muitas descobertas ao longo dos anos que contribuíram para a construção da Análise.

Após o levantamento de tantos resultados, surgiu a necessidade de organizá-los e desenvolver escritas mais rigorosas. E foi dessa maneira que ela iniciou seu processo de formalização. Embora seja muito difícil prever o início da análise formal, é importante ressaltar acontecimentos que contribuíram de maneira significativa nesse processo como, por exemplo, Euler que durante o século XVIII introduziu a ideia de função e um pouco depois o matemático Bernard Bolzano definiu de uma maneira "moderna"à continuidade em 1816, a seguir, outro matemático, Cauchy colaborou com a fundamentação de infinitesimais em estruturas lógicas e construiu um estudo muito forte em sequências numéricas, hoje conhecidas como sequências de Cauchy.(JAHNKE, 2003)

Outros matemáticos que desenvolveram esses estudos a partir de definições rigorosas e obtiveram resultados relevantes foram os franceses Liouville, Poisson e Fourier com estudos em derivadas e o alemão Weierstrass, criador do conceito de limite de função. Considerando que a análise surgiu da necessidade de estudos mais densos e uma escrita rigorosa, estudando inicialmente os números reais, sequências e funções, tais estudos ganharam dimensão que alcançaram números complexos e outros espaços, sendo estes métricos, lineares topológicos, normados e etc.

Por conta da grandeza da análise, se tornou uma tarefa muito difícil restringir sua área de atuação e delimitar seus alvos de estudos, à grosso modo podemos dizer que ela estuda a essência da matemática pura no sentido de viabilizar suas respectivas demonstrações e comportamentos enfatizando o rigor matemático.

## 1.2 Ernesto Cesàro e Otto Stolz

Na passagem do século XIX para o século XX, os matemáticos Otto Stolz e Ernesto Cesàro desenvolveram estudos acerca da análise e criaram um teorema que nos mostra para qual valor a sequência está tendendo, podendo está a convergir ou divergir.

Figura 1.1: Otto Stolz (1842-1905)

Fonte: The Free Encyclopedia Wikipedia (2019).

Nascido em 1842, na Áustria, Otto Stolz, foi aluno da universidade de Innsbruck, também na Áustria, onde estudou Matemática e Ciências Naturais, depois seguiu para Universidade de Viena onde estudou até receber seu Ph.D. em 1864. Anos depois Stolz recebeu uma bolsa de estudos adicionais em Berlim e Göttingen, nessas instituições foi aluno de Weierstrass, Kummer, Kronecker, Clebsch e Klein. Em 1972, retornou para Innsbruck onde se tornou professor titular e viveu o resto de sua vida. Seus estudos foram acerca de Geometria Analítica e Algébrica, Trigonometria Esférica e Análise real. Otto Stolz faleceu em 1905.

Ernesto Cesàro, nascido em 1859 na cidade de Nápoles na Itália, iniciou sua vida acadêmica em 1882 na Liège, na Bélgica, e publicou seu primeiro trabalho

Figura 1.2: Ernesto Cesàro (1859-1906)

Fonte:The Free Encyclopedia Wikipedia (2019).

matemático já em 1883, sobre Teoria dos Números, outros nove trabalhos apareceriam futuramente sobre esse assunto. Cesàro foi então à Paris, onde foi aluno de Hermite, Darboux, Serret Briot, Bouquet e Charles. Em Paris, Cesàro desenvolveu um grande interesse por Geometria intrínseca que resultou em alguns trabalhos na área. Ernesto sempre houve interesse em estudar na Itália, e acabou conseguindo uma bolsa de estudos na universidade de Roma, onde entrou em 1884. Nos anos seguintes, veio a desenvolver vários trabalhos sobre Aritmética Infinita, Problemas Isobáricos, Funções Holomórficas, Teoria Da Probabilidade e Geometria Intrínseca. Após esses trabalhos, Cesàro foi descobrindo interesse em várias áreas e desenvolvendo seus trabalhos, como na Geometria Diferencial, Análise Real e Física Matemática, seguiu sempre produzindo até o fim de sua vida, Ernesto Cesàro faleceu em 1906.

## 1.3 Preliminares

### 1.3.1 Sequências Numéricas

Um assunto muito desenvolvido ao longo desses anos foram as sequências numéricas, que hoje em dia já se tem uma noção bem definida e repleta de conceitos em torno desse estudo. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos naturais e assumindo valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ será representado por $x_n$ e chamado de n-ésimo termo da sequência. As seguintes notações são equivalentes: $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ou simplesmente $(x_n)$.

### 1.3.2 Sequência Limitada

Uma sequência de números reais é dita limitada quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$. Podemos ainda, representar a sequência limitada com apenas uma valor em módulo, basta tomar $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = max\{|a|, |b|\}$, assim vai existir a relação $|x_n| \leq c$ através das definições de módulo.

### 1.3.3 Sequência Monótona

Uma sequência de números reais é dita monótona quando ela for crescente ou decrescente.

$(x_n)$ é dita crescente quando: $x_n \leq x_{n+1} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$

$(x_n)$ é dita decrescente quando: $x_n \geq x_{n+1} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$

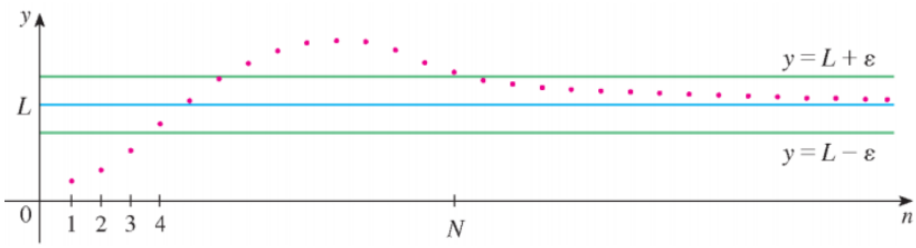
Podemos ainda, classificá-las em estritamente crescente quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou, estritamente decrescente, que ocorre quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

### 1.3.4 Limite de Sequência

Uma sequência de números reais $(x_n)$ possui como limite um número real $a$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|x_n - a| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\lim x_n = a. \equiv .\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \ \in \mathbb{N}\, ;\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Figura 1.3: Exemplo do gráfico de uma sequência que convergente.




Fonte: Edisciplinas USP (2019).

Basicamente, ser limite de uma sequência de números reais nos garante que, a partir de um certo número natural pertencente ao domínio, evidentemente, qualquer imagem de $x_n$ estará dentro de um intervalo de centro $a$ e raio $\varepsilon$, isto é $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Para facilitar a notação, sempre que o índice $n$ do limite estiver tendendo a $+\infty$ omitiremos essa informação, caso contrário, apresentaremos o valor. Por exemplo, quando apresentamos $\lim x_n$ quer dizer que este $n$ está tendendo a mais infinito, isto é $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim x_n$.

### 1.3.5 Subsequência

Seja $(x_n)$ uma sequência de números naturais, uma subsequência $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ é a restrição da função $x$ ao subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k,...}}\}$.

### 1.3.6 Teoremas

Aqui apresentaremos alguns teoremas constam desenvolvimento do trabalho, e que são essenciais no estudo de sequências numéricas. Para ajudar no entendimento faremos algumas demonstrações.

**Teorema 1.1.** *Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais. Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$ .*

*Demonstração.* Suponha que, sob estas condições tenhamos $a \neq b$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} n > n_1 &\;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon/2 \\ n > n_2 &\;\Rightarrow\; |x_n - b| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então temos que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2 \text{ e } |x_n - b| < \varepsilon/2.$$

Logo,

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $a = b$. E com isso podemos concluir que o limite é único.

$\square$

**Teorema 1.2.** *Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de $(x_n)$ converge para o limite $a$ .*

*Demonstração.* Seja $x_n$ uma sequência convergente com $\lim x_n = a$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Tomando $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ uma subsequência qualquer de $x_n$, sabemos que todos os termos com $n_k > n_0$ também pertencem ao mesmo intervalo. Assim, podemos dizer que se $n_k > n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Logo, $\lim x_{n_k} = a$. □

**Teorema 1.3.** *Toda sequência convergente é limitada.*

Seja $(x_n)$ uma sequência convergente de números reais, com $\lim x_n = a$, então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Tomemos $\varepsilon = 1$ temos que $x_n \in (a-1, a+1)$ sempre que $n > n_0$. Considere o conjunto finito $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$ e tome $u, v$ como seu maior e menor elemento, respectivamente. Assim, vemos que $x_n \in [u, v]$, logo $x_n$ é limitada.

**Teorema 1.4.** *Toda sequência monótona e limita é convergente.*

**Teorema 1.5.** *Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ sequências de números reais tais que* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *com $a, b, c \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes relações:*

*a)* $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$

*b)* $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

*c)* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *se* $y_n, b \neq 0$

*d)* $\lim c.x_n = c. \lim x_n$

**Teorema 1.6.** *Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ sequências de números reais tais que $(x_n)$ é limitada e* $\lim y_n = 0$ *então* $\lim\,(x_n.y_n) = 0$

*Demonstração.* Sendo $(x_n)$ uma sequência limitada, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n$ natural. Temos também que dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$. Então, quando $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < c \cdot \dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Logo, $\lim x_n \cdot y_n = 0$. □

**Teorema 1.7.** *Se* $\lim x_n = \lim y_n = a$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$*, para qualquer natural arbitrariamente grande, então* $\lim z_n = a$*.*

*Demonstração.* Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} n > n_1 &\Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \\ n > n_2 &\Rightarrow y_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon \\ &. \end{aligned}$$

Tomemos, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos que

$$n > n_0 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \text{ e } a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$$

Como, por hipótese, $x_n \leq z_n \leq y_n$ obtemos que

$$n > n_0 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon.$$

Logo, $n > n_0 \Rightarrow z_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Portanto $\lim z_n = a$.

□

### 1.3.7 Sequências de Cauchy

Seja $(x_n)$ uma sequências de números reais. Ela é dita de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n_0$ e $n > n_0$ implicar em $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Em outras palavras, temos que termos de índices muito grandes estão sempre a uma distância arbitrariamente próxima.

**Teorema 1.8.** *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja $\lim x_n = a$, visto que $x_n$ é uma sequência de números reis convergente. Então, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$m, n > |x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, toda sequência convergente é de Cauchy.

□

**Teorema 1.9.** *Toda sequência de Cauchy é convergente.*

### 1.3.8 Limites Infinitos

Dada uma sequência de números reais $(x_n)$ diz-se que "o limite de $(x_n)$ é mais infinito"e se escreve $\lim(x_n) = +\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$. Analogamente, podemos dizer que "o limite de $(x_n)$ é menos infinito"e se escreve $\lim(x_n) = -\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $B < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < B$.

**Teorema 1.10.** *Seja* $(x_n)$ *uma sequência de números reais tal que* $\lim x_n = +\infty$ *então* $\lim \dfrac{1}{x_n} = 0$.

*Demonstração.* Dado $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > A \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{A} \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - 0\right| < \frac{1}{A}.$$

Logo, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{A} > 0$ temos

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Assim, podemos concluir que $\lim \dfrac{1}{x_n} = 0$. □

Vejamos agora alguns exemplos de sequências:

**Exemplo 1.**

Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais definida por $x_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$, temos que $(x_n)$ é monótona e, em particular, é estritamente crescente pois $x_{n+1} > x_n$ para todo natural.

$$\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} > \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{n+1}} > 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^{n+1} > 2^n \Rightarrow 2 > 1.$$

Temos também que existem $a, b \in \mathbb{R}$ que tornam a sequência $(x_n)$ limitada, basta tomarmos $a = 0$ e $b = 1$. Assim, $0 < x_n < 1$ para todo $n$ natural. Uma outra forma de representar, é tomando o $\max\{0, 1\}$, dessa maneira podemos dizer que $|x_n| \leq \max\{0, 1\} = 1$.

Visto isso, temos que $(x_n)$ é monótona e limitada. Logo, pelo Teorema 1.4 podemos que concluir que a sequência é convergente.

Podemos conseguir outros resultados baseados nos anteriores como, por exemplo, o Teorema 1.8 nos garante que a sequência é de Cauchy.

**Exemplo 2.**

Neste outro exemplo, vamos avaliar a sequência de números reais $(y_n)$ definida por $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

É fácil ver, que $y_n$ não é uma sequência monótona pois, se construirmos os termos iniciais, vemos que eles alternam entre positivos e negativos. Assim, $y_n$ não é monótona.

$$(y_n) = \left( -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \cdots \right)$$

Mas a sequência ser monótona ou não monótona, independe do fato de ser limitada ou não. No exemplo anterior, tínhamos uma sequência monótona e limitada, e agora temos uma não monótona mas que é limitada. Basta tomarmos $a = -1$ e $b = 1$, que teremos $-1 \leq x_n \leq 1 \Rightarrow |x_n| \leq 1$.

Agora, avaliando de uma nova perspectiva, podemos escrever o limite de $y_n$ de outra maneira pra tirarmos outras conclusões, vejamos:

$$\lim y_n = \lim \frac{(-1)^n}{n} = \lim (-1)^n . \frac{1}{n} = \lim (-1)^n . \lim \frac{1}{n}$$

Dessa forma conseguimos ver dois limites e perceber que $(-1)^n$ é limitada pois sempre teremos $-1$ ou $1$ como imagem de uma função definida dessa forma, e também podemos ver que $\lim \frac{1}{n} = 0$. Logo, temos o produto de duas sequências, uma limitada e outra que converge pra zero. Portanto, pelo Teorema 1.6 temos que $\lim y_n = 0$.

**Exemplo 3.**

Agora vamos avaliar uma sequência $(z_n)$ de números reais definida por:

$$z_n = \begin{cases} 2019, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 2020, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Podemos ver que o comportamento dessa sequência alterna a imagem entre os dois valores apresentados.

$$(z_n) = (2019,\ 2020,\ 2019,\ 2020, ...).$$

Assim, novamente, temos uma sequência não monótona pois seus termos alternam sempre para um valor maior e depois um menor, e é uma sequência limitada pois $|z_n| \leq 2020$.

Dessa maneira, temos que pra termos arbitrariamente grandes precisamos saber se o elemento do domínio é impar ou par, e por conta dessa dependência, quanto $n$ tende a mais infinito não conseguimos precisar sua imagem. Portanto, $\lim z_n$ não existe.

# Capítulo 2

# Metodologia

## 2.1 Abordagem Metodológica

A abordagem adotada para realizar a pesquisa é a quantitativa, com a finalidade de explorar o estudo de critérios de convergência de sequências numéricas e desenvolver aplicações. Com características exploratórias, a pesquisa será desenvolvida ao longo de dois semestres de 2019, e direcionada à obtenção de métodos mais refinados para o estudo de sequências numéricas. Segundo Gil (2007), este tipo de pesquisa tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipóteses.

## 2.2 Instrumentos de Coleta de Dados

Para alcançar os dados necessários será feita uma pesquisa bibliográfica, que para Marconi e Lakatos (2013, p. 57), [...] "abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico e etc." [...] "Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito, ou filmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcendidos por alguma forma, quer publicadas quer gravadas. A partir dessas características os principais instrumentos de coleta de dados serão livros, artigos, dissertações, pesquisas e provas de olimpíadas de Matemática."

## 2.3 Etapas

A primeira etapa consiste num levantamento refinado de dados acerca do estudo de sequências numéricas e do teorema de Stolz-Cesàro junto de suas aplicações. Logo em seguida, serão desenvolvidas suas aplicações e demonstrações. Após esse processo de estruturação e construção de dados, esse levantamento será organizado no desenvolvimento da pesquisa e por fim apresentado.

# Capítulo 3

# Apresentação e Análise de Dados

## 3.1 Teorema de Stolz-Cesàro

Este teorema foi criado com intenção de avaliar sequências numéricas com comportamentos atípicos, que em grande parte apresentavam a indeterminação $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$, foi desenvolvido pelo matemático austríaco Otto Stolz(1842-1905), a partir dos primeiros estudos do matemático italiano Ernesto Cesàro(1859-1906). A partir de então foram desenvolvidas várias consequências deste teorema que permitem analisar os mais diversos tipos de sequências.

**Teorema 3.1.** *Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ duas sequências de números reais tais que $(y_n)$ é estritamente crescente com $\lim y_n = \infty$, e $(x_n)$ uma sequência qualquer de números reais. Se $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \in \mathbb{R}$ então $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$.*

*Demonstração.* Pela definição de sequência convergente, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \varepsilon.$$

O que implica em

$$a - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < a + \varepsilon. \tag{3.1}$$

Como $y_n$ é estritamente crescente, sabemos que vale

$$y_{n+1} > y_n \Rightarrow y_{n+1} - y_n > 0. \tag{3.2}$$

Agora podemos multiplicar as desigualdades 3.1 em ambos os lados pelo fator 3.2, obtendo

$$(a - \varepsilon).(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (a + \varepsilon).(y_{n+1} - y_n).$$

Como a partir de $n_0$ a sequência converge podemos escolher um $m > n_0$ com $m \in \mathbb{N}$ e obter, sucessivamente, as seguintes desigualdades:

$$(a - \varepsilon).(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}) < x_{n_0+2} - x_{n_0+1} < (a + \varepsilon).(y_{n_0+2} - y_{n_0+1})$$

$$(a - \varepsilon).(y_{n_0+3} - y_{n_0+2}) < x_{n_0+3} - x_{n_0+2} < (a + \varepsilon).(y_{n_0+3} - y_{n_0+2})$$

$$\vdots$$

$$(a - \varepsilon).(y_m - y_{m-1}) < x_m - x_{m-1} < (a + \varepsilon).(y_m - y_{m-1}).$$

Somando-se todas essas $(m - 1)$ desigualdades, temos:

$$(a - \varepsilon).(y_m - y_{n_0+1}) < x_m - x_{n_0+1} < (a + \varepsilon).(y_m - y_{n_0+1}). \tag{3.3}$$

Dividindo-se toda essa última desigualdade por $y_m$, temos:

$$(a - \varepsilon).\big(1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_m}\big) < \frac{x_m}{y_m} - \frac{x_{n_0+1}}{y_m} < (a + \varepsilon).\big(1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_m}\big).$$

Assim,

$$(a - \varepsilon).\big(1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_m}\big) + \frac{x_{n_0+1}}{y_m} < \frac{x_m}{y_m} < (a + \varepsilon).\big(1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_m}\big) + \frac{x_{n_0+1}}{y_m}.$$

Ou seja,

$$a-\varepsilon-a.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\varepsilon.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\frac{x_{n_0+1}}{y_m}<\frac{x_m}{y_m}<a+\varepsilon-a.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}-\varepsilon.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\frac{x_{n_0+1}}{y_m}.$$

Por termos $\lim y_m = +\infty$ então sabemos que

$$\lim\left(-a.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\varepsilon.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\frac{x_{n_0+1}}{y_m}\right)=0 \quad \text{e}$$

$$\lim\left(-a.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}-\varepsilon.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\frac{x_{n_0+1}}{y_m}\right)=0$$

Logo, existem $n_1, n_2 > n_0$ e pertencentes ao conjunto dos números naturais, tais que

$m > n_1 \Rightarrow -\varepsilon < -a.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\varepsilon.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\frac{x_{n_0+1}}{y_m} < +\varepsilon.$

Assim como,

$m > n_2 \Rightarrow -\varepsilon < +a.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}-\varepsilon.\frac{y_{n_0+1}}{y_m}+\frac{x_{n_0+1}}{y_m} < +\varepsilon.$

Portanto, para $m > \max\{n_1, n_2\} > n_0$ temos

$$a-2\varepsilon < \frac{x_m}{y_m} < a+2\varepsilon.$$

Isto é,

$$\left|\frac{x_m}{y_m}-a\right| < 2\varepsilon.$$

Em outras palavras, $\lim \frac{x_m}{y_m} = a.$

□

Essa demonstração é um pouco grande mas ela deixa bem clara cada um dos passos, e é possível ter algumas ideias no caminho que facilitem a demonstração ou pelo menos encurtem a prova. Vamos ver uma demonstração que pode surgir a partir de certo ponto da demostração, nesse caso iremos dar continuidade de 3.3

***Outra solução:***

Partindo de 3.3 temos que

$$(a-\varepsilon).(y_m-y_{n_0+1}) < x_m - x_{n_0+1} < (a+\varepsilon).(y_m-y_{n_0+1}).$$

E é fácil ver, a seguinte implicação abaixo

$$a - \varepsilon < \frac{x_m - x_{n_0+1}}{y_m - y_{n_0+1}} < a + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x_m - x_{n_0+1}}{y_m - y_{n_0+1}} - a \right| < \varepsilon.$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{x_m}{y_m} - a &= \left( \frac{x_m - x_{n_0+1} + x_{n_0+1}}{y_m} \right) - a \\
&= \left( \frac{x_m - x_{n_0+1}}{y_m} \right) \cdot \left( \frac{y_m - y_{n_0+1}}{y_m - y_{n_0+1}} \right) + \frac{x_{n_0+1}}{y_m} - a \\
&= \left( \frac{x_m - x_{n_0+1}}{y_m - y_{n_0+1}} \right) \cdot \left( \frac{y_m - y_{n_0+1}}{y_m} \right) - a + \frac{x_{n_0+1}}{y_m} \\
&= \left( 1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_m} \right) \cdot \left( \frac{x_m - x_{n_0+1}}{y_m - y_{n_0+1}} - a \right) + \frac{x_{n_0+1}}{y_m} - a \cdot \frac{y_{n_0+1}}{y_m}
\end{aligned}$$

E também vemos que $\left( 1 - \frac{y_{n_0+1}}{y_m} \right) < 1$ então, pela desigualdade triangular, temos

$$\left| \frac{x_m}{y_m} - a \right| \leq \left| \frac{x_m - x_{n_0+1}}{y_m - y_{n_0+1}} - a \right| + \left| \frac{x_{n_0+1} - a.y_{n_0+1}}{y_m} \right|.$$

Por ser $y_m \longmapsto +\infty$, então $\frac{x_{n_0+1} - a.y_{n_0+1}}{y_m} \longmapsto 0$ uma vez que $m$ tende ao infinito. Logo, existe $m_0$ pertencente ao conjunto dos naturais tal que

$$m > m_0 \Rightarrow \left| \frac{x_{n_0+1} - a.y_{n_0+1}}{y_m} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Desse modo, sempre que $m > \max\{n_0, m_0\}$ podemos concluir que

$$\left| \frac{x_m}{y_m} - a \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Portanto, $\lim \dfrac{x_m}{y_m} = a$.

**Observação**

Perceba que se a sequência $\left(\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right) \longmapsto +\infty$, então para todo $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n > n_0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > A \\ &\Rightarrow \quad x_{n+1} - x_n > A(y_{n+1} - y_n) > y_{n+1} - y_n. \end{aligned}$$

E isso implica que $x_n$ é crescente e $\lim x_n = +\infty$. Através do Teorema 1.10

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \Rightarrow \lim \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0.$$

E pelo teorema de Stolz-Cesàro, vemos que como $\lim \dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$, o limite de $\lim \dfrac{y_n}{x_n} = 0$. E novamente utilizando o Teorema 1.10 temos,

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Portanto, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) \longmapsto +\infty$.

Com esse resultado vemos que o teorema nos dá, não apenas um $a \in \mathbb{R}$ como resultado, mas se caso a sequência tenda a $\pm\infty$, tal valor também será apresentado. Logo, podemos dizer que $a \in [-\infty, +\infty]$ ou $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

**A Recíproca do Teorema**

Na Matemática, sempre que nos deparamos com alguma proposição que seja falsa, é comum apresentarmos um contraexemplo. Nesse caso, estamos avaliando o Teorema de Stolz e ele só garante uma implicação, pois a volta é dada como falsa e podemos dar um exemplo que falseia a volta.

**Solução.** *Seja $(z_n)$ uma sequência de números reais definida por $z_n = \dfrac{3n - (-1)^n}{3n + (-1)^n}$. Tome $x_n = 3n - (-1)^n$ e $y_n = 3n + (-1)^n$, assim temos:*

$$\lim z_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{3n-(-1)^n}{3n+(-1)^n} = \lim \frac{3n\left(1-\dfrac{(-1)^n}{3n}\right)}{3n\left(1+\dfrac{(-1)^n}{3n}\right)} = 1.$$

*Mas, por outro lado,* $\lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim \dfrac{3+2.(-1)^n}{3+2.(-1)^{n+1}}$*, e esta sequência nem possui limite, basta construirmos os termos iniciais e veremos que pelo teorema 1.2 que* $\left(\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right) = \left(\dfrac{1}{5}, 1, \dfrac{1}{5}, 1, \cdots\right)$ *possui duas subsequências convergindo para valores distintos, basta tomar os termos de posições pares como uma subsequência e os de posições ímpares como outra. Portando, essa sequência diverge.*

***Recíproca Ajustada***

*Como vimos agora, a recíproca do teorema não é verdadeira, no entanto, podemos fazer um ajuste para que ganhemos tal resultado, ampliando ainda mais as aplicações do teorema.*

**Teorema 3.2.** *Sejam* $x_n$ *e* $y_n$ *duas sequências de números reais tais que* $y_n$ *é estritamente crescente com* $y_n = +\infty$*,* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a \in \mathbb{R}$ *e* $\lim \dfrac{y_n}{y_{n+1}} = b \in \mathbb{R} - \{1\}$*. Então* $\lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a$*.*

*Demonstração.* Note que:

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right) \cdot \left(1-\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) + \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \cdot \left(\frac{y_n}{y_{n+1}}\right).$$

Aplicando o limite, temos

$$\lim \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \lim \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right) \cdot \left(1-\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) + \lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \cdot \left(\frac{y_n}{y_{n+1}}\right).$$

O que implica em

$$a = \lim \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right) \cdot (1-b) + a \cdot b.$$

Isolando o limite restante, obtemos

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{a - ab}{1 - b} = \frac{a(1-b)}{1-b} = a.$$

E na equação acima vemos o motivo de restringirmos $b \neq 1$. E concluímos a demostração.

□

A partir deste ponto, podemos ver algumas variações para o Teorema de Stolz-Cesàro que podem ser muito uteis no estudo de Sequências de Números Reais.

## 3.2 Variação do Teorema de Stolz Para Médias Aritméticas

**Corolário 1.** *Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais e consideremos $(s_n)$ a sequência de suas médias aritméticas, definida por*

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

*Se $(x_n)$ converge para $L$, então $(s_n)$ também converge para $L$.*

*Demonstração.* Seja $s_n = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, fazendo-se

$z_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$

$y_n = n$

Como $y_n$ é estritamente crescente e $\lim y_n = +\infty$, pelo Teorema de Stolz-Cesàro temos

$$\lim \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{x_n}{(n+1) - n} = \lim \frac{x_n}{1} = \lim x_n = L.$$

Logo,

$$\lim \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L.$$

Então temos que, graças ao teorema de Stolz-Cesàro, podemos concluir que

$$\lim \frac{z_n}{y_n} = \lim s_n = L.$$

Portando, se $(x_n)$ converge para $L$, então $(s_n)$ também converge para $L$.

$\square$

## 3.3 Variação do Teorema de Stolz Para Médias Geométricas

**Corolário 2.** *Seja* $(x_n)$ *uma sequência de números reais sempre positivos. Se* $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ *então*

$$\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

*Demonstração.* Avaliando $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim e^{(\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})} &= \lim e^{\ln (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}} \\
&= \lim e^{\left(\dfrac{\ln (x_1 x_2 \cdots x_n)}{n}\right)} \\
&= \lim e^{\left(\dfrac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Pela variação Teorema de Stolz para médias aritméticas temos

$$\lim e^{\left(\dfrac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}\right)} = \lim e^{\ln x_n} = \lim x_n.$$

Ou seja,

$$\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim x_n$$

Portanto, se $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$, então $\lim x_n = a$. $\square$

## 3.4 Variação do Teorema de Stolz Para Raízes n-ésimas

**Corolário 3.** *Seja* $(x_n)$ *uma sequência de números reais sempre positivos. Se* $\lim\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = a \in \mathbb{R}$ *então* $\lim \sqrt[n]{x_n} = a$.

*Demonstração.* Para esta demonstração vamos precisar de uma sequência $(a_n)$ de números reais positivos. Agora vamos construir uma sequência $(x_n)$ de maneira recursiva, tal que

$$a_1 = x_1 \text{ e } a_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}, n > 1, \text{ tal que, } \lim a_n = a.$$

Pela variação do Teorema de Stolz para médias geométricas temos que

Se $\lim a_n = a$ então

$$a = \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim \sqrt[n]{x_1 \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_{n+1}}{x_n}} = \lim \sqrt[n]{x_n}.$$

Logo, $\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

$\square$

## 3.5 Aplicações

Neste capítulo, serão apresentadas diversas aplicações do Teorema de Stolz-Cesàro. E será fácil ver a utilidade do teorema nos problemas propostos envolvendo sequências numéricas, desde casos mais simples aos mais complexos, que muitas vezes se apresentam nos livros e em olimpíadas universitárias. Para que não fique redundante, em alguns momentos, adotaremos a sigla SC quando utilizarmos o teorema para representar os nomes Stolz-Cesàro.

**Aplicação 1.**

Determine limite da sequência de números reais $(x_n)$, dada por $x_n = \dfrac{n}{5^n}$

**Solução.** *Pelo teorema de SC temos que*

$$\lim \frac{(n+1)-(n)}{5^{n+1}-5^n} = \lim \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

*Com isso, podemos concluir que* $\lim x_n = 0$.

**Aplicação 2.**

Mostre que $\sqrt[n]{n} = 1$.

**Solução.** *Este resultado é bem conhecido pra quem estuda análise, pois é usado com certa frequência para algumas demonstrações e existem várias maneiras de demonstrá-lo. No entanto, aqui veremos métodos utilizando o TSC. Baseado no que vimos até aqui, o que temos de mais pratico é o método para raízes n-ésimas. Assim,observando uma sequência de números reais* $(a_n)$ *definida por* $a_n = \sqrt[n]{n}$, *podemos ver que* $a_n = \sqrt[n]{x_n}$ *com* $x_n = n$, *agora com a variação do teorema de SC para raízes n-ésimas, temos*

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

*Portanto, pelo teorema de Stolz-Cesàro, temos* $\lim a_n = \lim \sqrt[n]{n} = 1$. *E aqui vemos que graças ao teorema, o resultado é obtido em poucas linhas.*

**Aplicação 3.**

Avalie a sequência abaixo e, se for convergente apresente seu limite.

$$x_n = \frac{\ln n! - n.\ln n}{n}$$

**Solução.** *Como o denominador da sequência forma uma sequência estritamente crescente com o* $\lim n = +\infty$ *podemos aplicar o Teorema de SC. Assim, temos:*

$$\lim \frac{\ln(n+1)! - (n+1)\ln(n+1) - \ln n! + n \ln n}{(n+1) - n}$$

*Aplicando as propriedades de logaritmos, temos*

$$\lim \frac{\ln(n+1)! - (n+1)\ln(n+1) - \ln n! + n \ln n}{(n+1) - n} =$$
$$\lim \frac{\ln(n+1) + \ln n! - n\ln(n+1) - \ln(n+1) - \ln n! + n \ln n}{(n+1) - n}.$$

*Assim,*

$$\Rightarrow -\lim[\ln(n+1)^n - \ln n^n] = -\lim \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = -1$$

*Portando, a sequência definida por* $x_n = \dfrac{\ln n! - n.\ln n}{n}$ *converge para* $-1$*, a partir de um* $n \in \mathbb{N}$ *arbitrariamente grande.*

**Aplicação 4.**

Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais definida por $x_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Mostre que a sequência dada é convergente e converge para $\dfrac{1}{e}$.

**Solução.** *Para utilizarmos a variação de Stolz-Cesàro para raízes n-ésimas, podemos ver que* $x_n = \sqrt[n]{y_n}$ *com* $y_n = \dfrac{n!}{n^n}$*. Assim, avaliemos*

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)n!(n+1)^n} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

*Deste modo, podemos reescrever o valor encontrado*

$$\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1}=e^{-1}.$$

*Portanto, pelo teorema de Stolz ,a sequência* $x_n=\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ *converge, e ainda, converge para* $\frac{1}{e}$.

**Aplicação 5.**

Mostre que se $\lim a_n=a$, então

$$\lim\left(\frac{1}{\ln n}.\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)=a.$$

**Solução.** *Pelo Teorema de SC, fazendo* $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$ *e* $y_n=\ln n$ *, temos que*

$$\lim\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln(n)}=\lim\frac{a_{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}.$$

*Agora, como, por hipótese,* $\lim a_n=a$ *então* $\lim a_{n+1}=a$ *pois, simplesmente, a sequência é convergente. Logo,*

$$\lim\frac{a_{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{a}{\ln e}=\frac{a}{1}=a.$$

*Portanto, de acordo com o Teorema de Stolz-Cesàro, fica provado que se* $\lim x_n=a$ *então* $\lim\left(\frac{1}{\ln n}.\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)=a$

**Aplicação 6.**

Seja $(a_n)$ uma sequência de números reais tal que $(a_n)$ é definida por

$$a_n = \frac{1 + 2\sqrt{e} + 3\sqrt[3]{e} \cdots + n\sqrt[n]{e}}{n^2}.$$

Calcule o limite da sequência.

**Solução.** *Neste problema, já podemos aplicar diretamente o Teorema de SC, fazendo* $x_n = 1 + 2\sqrt{e} + 3\sqrt[3]{e} \cdots + n\sqrt[n]{e}$ *e* $y_n = n^2$ *assim teremos*

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{(n+1)\sqrt[n+1]{e}}{2n+1} = \lim \frac{n}{2n}\left(\frac{1 + 1/n}{2 + 1/n}\right)e^{1/(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

*Logo, pelo teorema de SC,* $\lim \dfrac{1 + 2\sqrt{e} + 3\sqrt[3]{e} \cdots + n\sqrt[n]{e}}{n^2} = \dfrac{1}{2}.$

**Aplicação 7.**

Mostre que se $\lim a_n = a$, então

$$\lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1.a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

**Solução.** *Tomemos, neste problema,* $x_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1.a_n$ *e* $y_n = n^2$*. Vamos avaliar, desta vez, o teorema de uma maneira diferente, veremos o limite do quociente* $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$*. Temos que*

$$x_n - x_{n-1} = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1.a_n - ((n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \cdots + (1)a_{n-1})$$

*Efetuando a diferença e evidenciando os termo* $a_i$ *de mesma ordem temos*

$$x_n - x_{n-1} = (n - n + 1)a_1 + (n - 1 - n + 2)a_2 + \cdots + (2-1)a_{n-1} + a_n =$$
$$a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

*E avaliando,* $y_n - y_{n-1}$ *temos*

$$y_n - y_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1.$$

*Assim, temos que*

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{2n-1}.$$

*Neste ponto, como o quociente definido por* $2n-1$ *é estritamente crescente e* $\lim 2n - 1 = +\infty$ *podemos aplicar novamente o teorema de Stolz, obtendo*

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{2n-1} = \lim \frac{a_n}{2}.$$

*Como, por hipótese,* $\lim a_n = a$ *então* $\lim \frac{a_n}{2} = \frac{a}{2}$.

**Aplicação 8.**

Sabendo que $(z_n)$ é uma sequência de números reais, definida por

$$z_n = \frac{n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}}{\ln(n+1)!}.$$

E sabendo também que $(z_n)$ é convergente. Apresente o valor exato do seu limite.

**Solução.** *Neste problema, tomemos* $x_n = n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}$ *e* $y_n = \ln(n+1)!$*, assim, avaliaremos novamente o quociente* $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$*. Logo*

$$\begin{aligned}
x_n &= n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}. \\
x_{n-1} &= (n-1) + \frac{n-2}{2} + \frac{n-3}{3} + \cdots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}. \\
x_n - x_{n-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

*Agora, determinando* $y_n - y_{n-1}$ *temos*

$$y_n - y_{n-1} = \ln(n+1)! - \ln n! = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \ln(n+1).$$

*Assim vemos que*

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}.$$

*Mas aqui nos deparamos com outra sequência que possui uma análise difícil de convergência, no entanto o denominador* $\ln(n+1)$ *é estritamente crescente e possui limite tendendo a* $+\infty$*, então podemos aplicar novamente o teorema de Stolz-Cesàro. Faremos* $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ *e* $v_n = \ln(n+1)$*. E agora, vejamos o novo quociente*

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\ln(n+1) - \ln(n)} = \frac{1}{n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

*Aplicando o limite, temos* $\lim \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\ln e} = 1.$

*Logo, pelo teorema de SC temos que a sequência* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *também converge para 1, mas essa sequência é a* $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ *que agora sabemos que também converge para 1. Portanto, a sequência* $(z_n)$ *também converge para 1.*

**Aplicação 9.**

Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais, tal que $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n}$. Determine $\lim \dfrac{x_n}{n}$.

**Solução.** *Avaliando o comportamento da sequência através da sua lei de recursividade, temos que se* $x_{n+1} = \sqrt{x_1 + x_2 + ... + x_n}$ *implica em* $x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n$*, com isso vemos que* $(x_n)$ *é estritamente crescente e , ainda,* $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

*De fato, basta ver os termos iniciais*

$$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, x_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, ...$$

*Outra forma de argumentar que* $x_n$ *é monótona é usando a relação obtida* $x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n$ *e o fato de que* $x_n \geq 1$*, para todo natural. Pois, assim*

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n \geq x_n^2 + 1 > x_n^2 + 0 = x_n^2.$$

*Logo,*

$$x_{n+1}^2 > x_n^2 \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

*Agora, conhecendo essa característica da sequência, sabemos que $(x_n)$ pode ser limitada ou não. Se for limitada então é convergente, deste modo existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lim x_n = L \text{ , ou seja, deve valer:}$$
$$L^2 = L^2 + L, \text{ o que implica, } L = 0$$

*Mas isso é uma contradição, uma vez que $(x_n)$ é estritamente crescente e $x_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $(x_n)$ não é limitada, isto é,*

$$\lim x_n = +\infty \text{ , e mais } \lim \frac{1}{x_n} = 0.$$

*Logo, da relação de recursividade, temos que*

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n \Rightarrow \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = 1 + \frac{1}{x_n} \Rightarrow \lim \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = 1 \Rightarrow \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1.$$

*Aplicando o teorema de S.C.,*

$$\lim \frac{x_n}{n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - (n)} = \lim \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \lim \frac{x_n}{x_{n+1} + x_n}.$$

*Logo, dividindo tudo por $x_n \geq 1$ , resulta em*

$$\lim \frac{1}{\frac{1}{x_n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

*Portanto,*

$$\lim \frac{x_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

**Aplicação 10.**

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por $a_n = \int_0^1 f(n+x)dx$ é convergente. Prove que a sequência $(b_n)_{n\geq 0}$, dada por,

$$b_n = \int_0^1 f(nx)dx \text{ é convergente.}$$

**Solução.** *Partindo de* $\int_0^1 f(nx)dx$ *e fazendo a mudança* $u = nx$ *temos que*

$$\int_0^1 f(nx)dx = \int_0^n \tfrac{f(u)}{n}du = \frac{1}{n} \cdot \int_0^n f(u)du.$$

*Fazendo-se* $x_n = \int_0^n f(u)du$ *e* $y_n = n$ *temos também*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\int_0^{n+1} f(u)du - \int_0^n f(u)du}{(n+1) - (n)} = \int_n^{n+1} f(u)du.$$

*Agora, vamos voltar para a variável* $x$ *mas com a seguinte mudança* $u = n+x$. *Assim, obtemos*

$$\int_n^{n+1} f(u)du = \int_0^1 f(n+x)dx = a_n.$$

*Logo, pelo teorema de Stolz-Cesàro, a sequência* $(b_n)$ *é convergente.*

# Considerações Finais

Ao longo do trabalho, vimos a eficiência do teorema de Stolz-Cesàro para o estudo de sequências numéricas, ainda mais quando tentamos desenvolver uma análise de determinadas sequências, sobre sua convergência, sem utilizar o método, pois a resolução exige muito recursos e artifícios, se tornando uma resolução muito mais complexa e de certa forma, carregada.

No decorrer, foi percebido uma gama de aplicações que vão além das apresentadas neste trabalho como, por exemplo, as aplicações envolvendo supremo $\limsup \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \limsup \dfrac{a_n}{b_n}$ e ínfimo $\liminf \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \geq \liminf \dfrac{a_n}{b_n}$. E ainda, no decorrer dos estudos, um teorema que pode ser visto como um complemento do teorema de Stolz que é o teorema de Toeplitz, que faz transformações de sequências numéricas para que logo em seguida apliquemos o Teorema de Stolz-Cesàro.

Com o fim do trabalho, ficou claro que, junto dos meu orientadores, suprimos a ideia inicial e alcançamos os objetivos desejados inicialmente, já que desenvolvemos de maneira clara aplicações do Teorema de Stolz-Cesàro, que se mostrou repleto de utilidade na Análise Real, e ainda, como mencionado no parágrafo acima, encontramos outras áreas a serem desenvolvidas a partir desta pesquisa.

# Referências Bibliográficas


[1] ÀVILA, Geraldo. *Análise Matemática Para Licenciatura.*São Paulo, Edgard Blucher ltda, 2006.

[2] GELCA, Razvan. ANDREESCU, Titu. *Putnam and Beycond, second edition.* California, Springer. 2017.

[3] GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa.* 4. ed. São Paulo, 2002.

[4] JAHNKE, Hans Niels. *A History of Analysis*. London, Edition Board London Mathematical Society, 2003.

[5] KACZOR, W.J; NOWAK, M.T.*Problems in Mathenatical Analysis I- Real Numbers, Sequences and Series*. American Mathematical Society. 2000.

[6] LIMA, Elon Lages.*Curso de Análise vol. 1.* Rio de Janeiro, instituto de Matemática Pura e Aplicada. 2013.

[7] LIMA, Elon Lages.*Análise Real.* Rio de Janeiro, instituto de Matemática Pura e Aplicada. 2013.

[8] NAGY, Gabriel. *The Stolz-Cesàro Theorem.*Kiel, Leibniz Institute for Science and Mathematics Education.

[9] OLIVEIRA, Nilomar Vieira. O Teorema de Stolz. *Análise Real,* Manaus, Universidade Federal do Amazonas, 4 dez. 2018.

[10] UCHÔA, Diego Veloso. LEME, Renato Purita Paes. *O Teorema de Stolz.* Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática. 2003.