UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS - ENS

NICOLE BARAÚNA DE SOUZA

MÉTODOS CONTEMPORÂNEOS PARA CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEM $N \geq 3$ E MATRIZES INVERSAS DE ORDEM 3.

Orientador(a): Prof. Alessandro Monteiro de Menezes, MSc.

Manaus – Novembro – 2019

NICOLE BARAÚNA DE SOUZA

MÉTODOS CONTEMPORÂNEOS PARA CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEM $N \geq 3$ E MATRIZES INVERSAS DE ORDEM 3.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca avaliadora do Curso de Licenciatura em Matemática, da Escola Normal Superior, da Universidade do Estado do Amazonas, como pré-requisito para obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador(a): Prof. Alessandro Monteiro de Menezes, MSc.

Manaus – Novembro – 2019

Capítulo 1

Folha de Aprovação

GOVERNO DO ESTADO DO
AMAZONAS

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **NICOLE BARAÚNA DE SOUZA**

Aos 03 dias do mês de dezembro 2019, às 19 horas, em sessão pública na Sala Maria de Nazarethda Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pela professora da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Me. Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Me. Alessandro Monteiro de Menezes** representado pela prof. **Dra Nadime Mustafa Moraes, Me. Rogério Jacinto de Moraes Junior** e **Dr. Almir Cunha da Graça Neto,** a aluna **NICOLE BARAÚNA DE SOUZA** apresentou o Trabalho: **"MÉTODOS CONTEMPORÂNEOS PARA O CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEM N≥3 E MATRIZES INVERSAS DE ORDEM 3"** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,2 à monografia divulgando o resultado ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata.

Presidente da Banca Examinadora

Orientador (a)

Avaliador 1

Avaliador 2

Aluna

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
Escola Normal Superior
Av. Djalma Batista, Nº 2470, Chapada
CEP: 69050-010 / Manaus-AM
www.uea.edu.br

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, à Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada. Aos meus pais que se sacrificaram para me proporcionar uma educação de qualidade e desde tão novos fizeram de tudo para eu chegar aqui. Ao professor MSc Alessandro Monteiro que apesar do pouco tempo que tivemos para fazer o trabalho me apoiou.

Aos meus amigos e colegas de sala que sempre me deram apoio nos trabalhos e estágios, ao meu companheiro Ademir Martins que não me deixou desistir em nenhum momento e por último mas não menos importante agradeço a minha saúde mental que me segurou quando o meu trabalho deu errado três vezes.

Epígrafe

Muitas vezes na vida tomamos decisões com as quais não estamos preparados para conviver...

How I Met Your Mother

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Entre as diversas áreas do conhecimento, a disciplina de Matemática se destaca por apresentar um grau de dificuldade de aprendizagem conforme relatos de alunos e professores e da própria observação em estágios nas escolas. Tendo em vista as especificidades de cada componente curricular, a matemática tem como característica o seu rigor próprio , que sendo baseado em premissas ou axiomas são importantes para a boa compreenssão dessa ciência em geral.

É perceptível que ao longo dos anos, a Matemática vem sendo tratada como uma disciplina extremamente difícil. Buscar métodos que facilitam a aplicação de definições já existentes se faz necessário como, por exemplo, na utilização para questões de concursos ou, até mesmo, na sala de aula em que a utilização de métodos que demandam menos tempo e são mais práticos são sempre bem-vindos.

No processo de ensino aprendizagem das matrizes, assunto que tem como característica principal ser ministrado no segundo ano do ensino médio, notou-se que o desenvolvimento de matrizes inversas exige um certo trabalho e leva demasiado tempo para sua obtenção. Além do fato de que os alunos conseguirem compreender o método tradicional apontado nos materiais didáticos.

Outro conteúdo abordado no segundo ano são os determinantes de matrizes quadradas em que quanto maior o valor da ordem da matriz, maior o trabalho que se tem ao fazer o cálculo do determinante. Hoje o grande problema desde o ensino médio é certamente nas matrizes de ordem 4 que, muitas vezes, o método não chega a ser compreendido e por isso, professores ministram apenas de matrizes de ordem 3.

O conceito de matriz inversa neste trabalho será construído desde o conteúdo de determinantes de matrizes de ordem 3, já que a matriz inversa é baseada apartir do conhecimento do determinante e da matriz adjunta. Este trabalho tem como objetivo geral apresentar técnicas apontadas por Thirumurugan (2014), Armend Salihu (2012) e Salihu junto com Qefsere Gjonbalanj dessa vez (2009), que estabelecem as matrizes inversas e determinantes e como objetivos específicos aplicar os métodos definidos para matrizes de ordem 3 e de ordem 4.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Esta seção aborda os conceitos que envolvem o contexto desta proposta, fazendo uma revisão bibliográfica sobre o tema para que após a aquisição do conhecimento possa ser proposto uma solução aplicando tais fundamentos.

2.1 Aspectos históricos de matrizes e determinantes

Para a análise dos aspesctos hitóricos foi utilizado um artigo de Bernardes (2016). A ordem de exposição de alguns conceitos matemáticos acontece de forma inversa quando com ordem em que apareceram na história. A noção de matriz surgiu depois das noções de determinantes, sistemas lineares, transformações lineares, formas quadráticas e de autovalores, ou seja, a ordem inversa na qual são apresentados hoje na disciplina de Álgebra Linear, ou mesmo na sala de aula de ensino médio.

No lado ocidente a teoria dos determinantes deu-se por volta de 1683 através do alemão Leibniz (1649-1716) que em contato com o matemático francês L'Hospital (1661-1704), utilizou combinações de coeficientes com a finalidade de resolver sistemas de equações lineares e encontrou um modo de restituir tais coeficientes com números.

O matemático francês Cauchy (1789 - 1857) foi quem atribuiu o termo determinante no sentido que encontramos hoje, em 1812 demonstrou o teorema da multiplicação de determinantes, por meio da utilização de permutações e também melhorou a notação de determinantes.

Porém, a notação de duas barras verticais ladeando um quadrado de números para indicar determinante, só foi apresentada em 1841 pelo matemático inglês Cayley (1821 - 1895).

O início das matrizes vem a partir do século II a.C. Porém, foi a partir do século XVII que as ideias passaram a evoluir até os dias atuais. Os chineses entre os anos 200 a.C e 100 a.C foram os que chegaram mais perto das matrizes, na verdade, é justo dizer que o texto *Nove Capítulos da Arte Matemática* escrito durante a dinastia Han dá o primeiro exemplo conhecido de métodos de matriz.

O nome matriz foi dado pelo matemático James Joseph Sylvester em 1850 que contou com o reforço de seu amigo chamado Cayley. Este deu o primeiro significado para a palavra matriz como sendo algo que se gera. No seu artigo Cayley afirmou que "matriz é um bloco regular de termos a partir da qual pode-se formar sistemas de determinantes."(BERNARDES, 2016)

A partir do artigo de Cayley em 1855 as matrizes passaram a ter rigor próprio saindo assim da sombra do determinantes, desse modo Cayley levou mérito da invenção, apesar de ter alegado que chegou ao estudo das matrizes com as ideias de determinantes e acentuou que pela lógica que lhe conferia que a teoria de matrizes antecede a de determinante.

Após essas definições criou-se a definições seguintes como produto de matrizes, matriz inversa, matriz identidade, matriz nula e a matriz idêntica. Por outro lado, somente três anos depois incorporou ao estudo a soma e o produto de matrizes por escalares.

2.2 Definição de matrizes

Segundo Lages (2013) uma matriz real $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ é uma lista de número reis a_{ij} com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Costuma-se representar a matriz A como um quadro numérico com m e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento da i-ésima linha com a j-ésima coluna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Deste modo, quando $m = n$, diz-se que A é uma matriz quadrada.

2.2.1 Matrizes Especiais

Segundo Iezzi (2016) há matrizes que, por apresentar uma utilidade nesta teoria, recebem um nome especial:

a) matriz - linha é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é uma matriz que tem uma única linha.

b) matriz - coluna é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

c) matriz - nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

2.2.2 Igualdade de Matrizes

Segundo Iezzi (2016) dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in (1, 2, 3, ..., m)$ e para todo $j \in (1, 2, 3, ..., n)$. Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes (elementos com os mesmos índices) iguais.

2.2.3 Matriz Oposta

Segundo Iezzi (2016), dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ chama-se oposta de A (indica-se por $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

2.2.4 Matriz Transposta

Segundo (IEZZI, 2016) dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ij})_{m\times n}$ tal que $a'_{ij} = a_{ji}$ para todo i e para todo j. Isto significa que, por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.2.5 Matriz Identidade

Para (IEZZI, 2016)Uma matriz $n \times n$ é dita identidade quando todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal forem nulos e, além disso, todos os elementos da diagonal principal forem iguais a 1.

2.2.6 Matriz Inversível

Para (IEZZI, 2016) seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A uma matriz singular.

Teorema 1

Se A é inversível, então B é a única matriz tal que $AB = BA = I_n$.

Matriz inversa

Dada uma inversível de A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} que é única tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

2.2.7 Matriz Diagonal

Para (IEZZI, 2016) uma matriz $n \times n$ é dita diagonal quando todos os elementos acima e abaixo diagonal principal forem nulos, isto é, quando todo elemento a_{ij} com $i \neq j$ for igual a zero. Podemos dizer também que uma matriz é dita diagonal quando ela for triangular inferior e superior.

2.2.8 Matriz Triangular

As três definições dadas a seguir são de (IEZZI, 2016) Uma matriz quadrada $n \times n$ é dita triangular quando for triangular superior ou inferior.

2.2.9 Matriz Triangular Superior

Uma matriz $n \times n$ é dita triangular superior quando todos os elementos abaixo da digonal principal forem nulos.

2.2.10 Matriz Triangular Inferior

Uma matriz $n \times n$ é dita triangular inferior quando todos os elementos acima da digonal principal forem nulos.

2.2.11 Matriz Simétrica

Uma matriz é dita simétrica quando for ela for igual a sua transposta. Isto é, se A é uma matriz simétrica então $A = A^T$.

2.3 Teoria dos determinantes

As definições dadas nesse tópico são de (IEZZI, 2016). Considerando o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja A uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos determinante da matriz A (indica-se por $detA$) o número que podemos obter operando com os elementos de A da seguinte forma:

1. Se A é de ordem $n = 1$, então $detA$ é o único elemento de A. $A = (a_{11}) \Rightarrow detA = a_{11}$.

2. Se A é de ordem $n = 2$, o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Se A é de ordem $n = 3$, então para uma melhor compreensão, consideremos A representada da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

é o número $detA = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 + a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2$.

O determinante da matriz é a soma de $6 = 3!$ parcelas, cada uma das quais é um produto de três fatores a linhas e colunas diferentes. Assim, cada uma das seis parcelas é um produto do tipo abc, com os índices 1,2 e 3 aparecendo, cada um uma vez, em todas as parcelas. A ordem em que esses índices aparecem é relevante. Ela corresponde ás permutações de 1, 2 e 3. As permutações 123, 312, 231 aparecem nas parcelas precedidas do sinal + enquanto as permutações 213, 321 e 132 correspondem as parcelas precedidas do sinal -. As três primeiras são chamadas as permutações pares. Elas são obtidas quando se tomam três números consecutivos quaisquer na sequência

123123123123123123123123123...

2.3.1 Menor Complementar e Complemento Algébrico

Considerando uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de A. Definimos menor complementar do elemento a_{ij} e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém, suprimindo a linha i e coluna j de A.

Considerando ainda uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de A. Definimos complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij}) e indicamos por A_{ij}, como sendo o número $(-1)^{i+j}.D_{ij}$.

2.3.2 Definição de Determinante por Recorrência

Seja A uma matriz de ordem n. Definimos determinante da matriz A, e indicamos por $detA$, da seguinte forma: Se n é de ordem $n \geq 2$, então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

e definimos

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$detA = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + \ldots + a_{n1}.A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}.A_{i1}$.

Isto é, o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos da primeira coluna, pelos respectivos cofatores.

2.3.3 Teorema Fundamental

O determinante de uma matriz A, de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores. Isto é,

a) Se escolhermos a coluna j da matriz A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \ddots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

.

Então, $detA = a_{ij}.A_{ij} + a_{2j}.A_{2j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj}$

b) Se escolhermos a linha i da matriz A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Então, $detA = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \ldots + a_{in}.A_{in}$.

Portanto, para calcularmos um determinante, não precisamos necessariamente dos elementos da primeira coluna e seus cofatores; qualquer coluna (ou linha) e seus cofatores permitem o cálculo.

2.3.4 Regra de Sarrus

Segundo Iezzi (2013) para uma matriz de ordem 3 temos mais um método que pode ser memorizado da seguinte forma:

1. Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

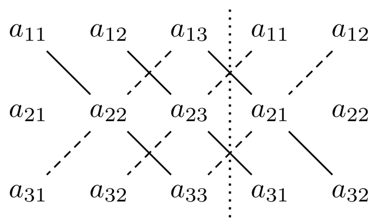
2. Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as linhas situadas na direção da diagonal principal:

$$a_{11}a_{22}a_{33}; a_{12}a_{23}a_{31}; a_{13}a_{21}a_{32}$$

3. Os termos precedidos pelo sinal (-) são obtidos multiplicando-se segundo as linhas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13}a_{22}a_{31}; -a_{11}a_{23}a_{32}; -a_{12}a_{21}a_{33}$$

Figura 2.1: Regra de Sarrus



Fonte: Wikipedia (2012)

Este dispositivo prático é conhecido como regra de Sarrus para cálculo de determinantes de ordem 3.

2.3.5 Regra de Chió

A regra de Chió pode ser resumida em três passos

1. Desde que a matriz A dada tenha o elemento $a_{11} = 1$, suprimos a primeira linha e a primeira coluna da matriz A.

2. De cada elemento restante na matriz subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares"traçadas do elemento considerado à primeira linha e à primeira coluna.

3. Com as diferenças obtidas, constuímos uma matriz de ordem $(n-1)$ cujo determinante é igual ao de A.

2.3.6 Regra de Laplace

O teorema de Laplace pode ser aplicado a qualquer matriz quadrada. Para calcular os determinantes, devemos seguir os seguintes passos:

1. Selecionar uma fila (linha ou coluna), dando preferência a fila que contenha a maior quantidade de elementos igual a zero, pois torna os cálculos mais simples;

2. Somar os produtos dos números da fila selecionada pelos seus respectivos cofatores.

2.3.7 Permutação

Definição 1. Uma permutação de um conjunto finito é um rearranjo dos elementos desse conjunto em certa ordem , sem falta ou repetição de nenhum deles.

Definição 2. Uma permutação é par se o número de trocas que devemos realizar entre seus elementos para recuperar a ordem original da sequência for par. A permutação é ímpar se este número for ímpar.

Capítulo 3

Metodologia da pesquisa

3.1 Abordagem metodológica

A abordagem metodológica utilizada para realizar a pesquisa quantitativa, com o intuito de explorar as técnicas de determinação de matrizes de ordem 3 e determinantes de ordem 3 e 4. Com aspectos exploratórios a pesquisa foi desenvolvida ao longo do segundo semestre de 2019 e direcionada a determinação de matrizes inversas e determinantes. O método dedutivo foi utilizado pois a partir de Prodanov (2013)

> "O raciocínio dedutivo tem o objetivo de explicar o conteúdo das premissas. Por intermédio de uma cadeia de raciocínio em ordem descendente, de análise do geral para o particular, chega a uma conclusão. Usa o silogismo, a construção lógica para, a partir de duas premissas, retirar uma terceira logicamente decorrente das duas primeiras, denominada de conclusão."(PRODANOV, 2013)

3.2 Instrumentos de coletas de dados

A pesquisa bibliográfica utiliza materiais já publicados, nesse projeto em específico com artigos. Segundo Fonseca (2002), a pesquisa bibliográfica é definida por meio do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta. (FONSECA, 2002)

Os trabalhos de Thirumurugan (2014) e Salihu (2012) cercam os conceitos de determinantes utilizando os conhecimentos prévios como Método de Chió e Método de Sarru mas modelados de forma que trazem outra abordagem para os determinantes.

3.3 Etapas

A pesquisa teve três etapas. A primeira etapa foi o levantamento de artigos sobre o assunto de matrizes e determinantes. A segunda sobre os aspectos históricos acerca do assunto por último as aplicações foram desenvolvidas.

Capítulo 4

Métodos para cálculo de determinantes e matrizes.

4.1 Determinante de uma matriz 3×3 - Thirumurugan

Esse método, para Thirumurugan (2014), pode ser um dos mais fáceis para o cálculo de determinante de terceira ordem. Abaixo, será apresentado três tipos de métodos para encontrar o valor dos determinantes. Para facilitar a notação e compreensão do assunto a matriz genérica de ordem três será apresentada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

.

Tipo 1:

Esse método é formado por seis diagonais com três elementos distintos. As diagonais serão formadas quando os termos destacados forem espelhados no lado oposto da matriz, desse modo:

$$\begin{array}{ccc} & b_3 & \\ c_2 & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & a_2 \\ & b_1 & \end{array}$$

Os produtos dos elementos em três diagonais do lado esquerdo serão positivas e do lado direito negativas. Quando aplicamos este método, temos:

$$detA = a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3.$$

Tipo 2: Este método também é formado por seis diagonais com três elementos distintos. As diagonais serão formadas quando os termos extremos da matriz (destacados abaixo) forem espelhados para o seu lado oposto na matriz verticalmente, dessa forma:

$$\begin{vmatrix} a_3 & & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & & c_1 \end{vmatrix}$$

Aplicando esse tipo, temos:

$$detA = a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3.$$

Tipo 3:

Este método também é formado por seis diagonais com três elementos distintos. As diagonais serão formadas quando os termos extremos da matriz (destacados abaixo) forem espelhados para o seu lado oposto na matriz horizontalmente, dessa maneira:

Aplicando, temos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} c_1 & a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ c_3 & a_3 & b_3 & c_3 & a_3 \end{array}$$

$$detA = a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3.$$

4.2 Inversa de uma matriz 3×3 - Thirumurugan

Por definição , a matriz inversa de A é dada por $A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA$.

Então, para determinarmos a inversa, neste momento, precisamos apenas da matriz adjunta pois já conhecemos os métodos de determinantes.

O método tradicional para determinar a adjunta é um processo demorado e de difícil execução, pois precisamos encontrar cada cofator da matriz, montar a matriz dos cofatores e em sequência calcular a sua transposta.

Para encontrar a adjunta de A, o novo método pode ser formado usando os seguintes passos:

1. Repetir a primeira e a segunda coluna como fosse fazer a regra de Sarrus.

$$detA_1 = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

.

2. Depois, repetir a primeira linha depois da terceira linha e em seguida repetir a segunda linha.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

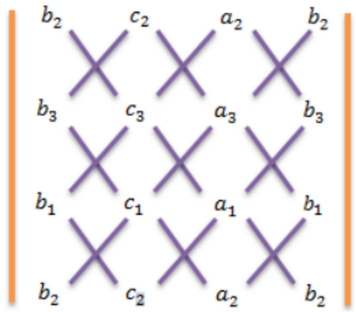
3. Agora, utilizando a ideia do método de Chió, retirar a linha e a coluna do elemento a_{11}.

   Encontra-se uma matriz de ordem 4:

$$\begin{pmatrix} b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

4. A cada quatro termos adjacentes faremos a operação de determinantes de ordem 2, assim:

Figura 4.1: Esquema de Thirumurugan



Fonte: Thirumurugan (2014)

Encontra-se:

$$M = \begin{vmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 & c_2a_3 - a_2c_3 & a_2b_3 - b_2a_3 \\ b_3c_1 - b_1c_3 & c_3a_1 - c_1a_3 & a_3b_1 - b_3a_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & c_1a_2 - a_1c_2 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$

.

5) Calcular a transposta

$$AdjA = M^T = \begin{vmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_2a_3 - a_2c_3 & c_3a_1 - c_1a_3 & c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_2b_3 - b_2a_3 & a_3b_1 - b_3a_1 & a_1b_2 - b_1.a_2 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$

.

Substituindo a adjunta na equação da matriz inversa, temos:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{detA}\begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_2a_3 - a_2c_3 & c_3a_1 - c_1a_3 & c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_2b_3 - b_2a_3 & a_3b_1 - b_3a_1 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}.$$

4.3 Determinante de uma matriz 4×4 - Salihu

O método de Salihu (2009) trás um método mais simples do cálculo de determinantes de matrizes 4×4. Tome uma matriz quadrada A, da forma $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

.

Definição 3. O determinante de uma matriz de ordem n é a soma de $n!$ termos formados pelos elementos da matriz.

$$DetA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{Sn} E_{j_1,j_2,\cdots,j_n}.$$

onde $E_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ é igual a (1) se $j_1, j_2, \cdots, j_n$ é uma permutação ímpar (-1) se $j_1, j_2, \cdots, j_n$ é uma permutação par.

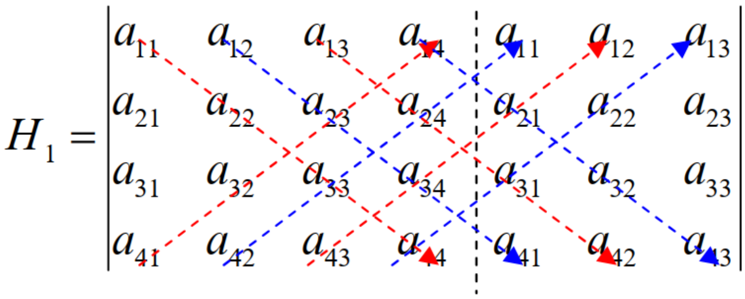
Para o cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

pela definição 3 que acabou de ser apresentada podemos calcular o $detA = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$.

Então, para encontrar o determinante de uma matriz de ordem 4 é necessário 4! elementos distintos. Se desmontarmos a matriz de ordem 4, pelo método de Sarru, da forma que é utilizado para uma matriz de ordem 3. Obtemos:

Figura 4.2: **Esquema 1**



Fonte:Salihu (2009)

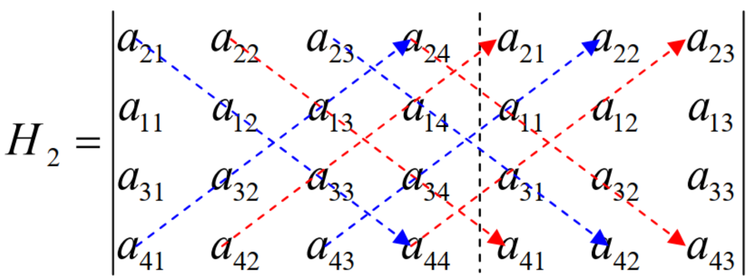
$H_1 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$.

Dessa forma, encontra-se oito combinações diferentes, formadas por oito diagonais com quatro elementos diferentes de determinantes.Partindo da diagonal principal, que será nossa primeira diagonal, teremos mais três no mesmo sentido. Outras quatro diagonais, irão surgir a partir da diagonal secundária que será nossa quinta diagonal e após dela teremos mais três no mesmo sentido, totalizando as oito. Cada produto de elementos de uma diagonal resultará em um novo número real. Se este número for gerado por uma diagonal de posição ímpar (diagonal vermelha) recebe uma multiplicação por $+1$, caso seja produto de elementos de uma diagonal de posição par (diagonal azul) multiplicamos por -1.

Para terminar, o determinante ainda é necessário encontrar dezesseis outras combinações.

O próximo passo é traspor a primeira e a segunda linha. Assim, encontra-se:

Figura 4.3: **Esquema 2**



Fonte:Salihu (2009)

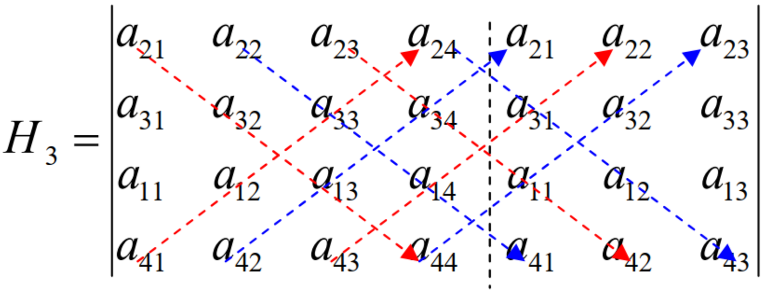
$H_2 = -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} -$

$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$.

Nesse caso, outras oito combinações são encontradas.

Agora, transpondo a segunda linha com a terceira linha para encontrar mais oito combinações.

Figura 4.4: Esquema 3



Fonte: Salihu (2009)

$H_3 = a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$.

Ao fim, somando $H_1 + H_2 + H_3$ o resultado é o valor do determinante da matriz A.

Se compararmos esse método com os demais métodos encontra-se os mesmos resultados.

4.4 Determinante de uma matriz de ordem ≥ 3 - Salihu

A partir de agora, será apresentado um método de Salihu (2012) que comparado aos demais possui maior abrangência pois com este podemos calcular determinantes de ordem $3 \times 3, 4 \times 4, 5 \times 5, ..., n \times n$.

Esse método é baseado no método de condensação de Chió e no processo de aplicação do método é necessário de quatro determinantes de $(n-1) \times (n-1)$ e outro de ordem $(n-2) \times (n-2)$ para transformar uma matriz de ordem $n \times n$ numa ordem 2×2. Abaixo um exemplo aplicado numa matriz genérica de ordem 4×4 para algumas explicações e depois generalização para $n \times n$.

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

uma matriz genérica de ordem 4×4, como dito anteriormente deve ter uma matriz de ordem 2×2 e quatro determinantes de ordem 3×3 que serão obtidas da seguinte maneira:

A matriz 2×2 será denominada e formada pelos termos centrais da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

As matrizes de ordem 3×3 serão obtidas uma de cada vez, eliminando uma linha e uma coluna da matriz A a partir de um termo destacado.

Será chamado de C a primeira matriz de ordem 3×3 e será eliminado o elemento a_{44} junto de sua respectiva linha e coluna, obtendo a matriz C.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Agora, D será a segunda matriz de ordem 3×3 e eliminar o elemento a_{41} junto de sua respetiva linha e coluna, obtendo:

$$D = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

O mesmo será feito com a terceira e quarta matrizes, respetivamente, os elementos a_{14} e a_{11} junto de sua linha e coluna, denota-se por E e F:

$$E = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

e

$$F = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Agora, como vimos as contruções o método nos diz que:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}, |B| \neq 0.$$

O $detB$ é o determinante de ordem $(n-2) \times (n-2)$ que é o determinante interior do determinante $detA$ enquanto $detC$, $detD$, $detE$ e $detF$ são determinantes únicos de ordem $(n-1) \times (n-1)$, que pode ser formada a partir de determinantes de ordem $n \times n$.

Capítulo 5

Aplicações

Nesse capítulo serão apresentadas algumas aplicações mostrando de que forma cada um dos métodos podem ser utilizados.

5.1 Aplicação 1: Método Thirumurugan 3×3

Dada a matriz A abaixo determine a sua inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Primeiro é necessário encontrar o determinante.Utilizando o tipo um de Thirumurugan. Logo,

$$detA = -20 - 8 - 6 + 24 = 24 - 34 = -10.$$

2. Agora utilizando o método da matriz inversa do capítulo 3.2 encontra-se a matriz 4x4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

O próximo passo é o cálculo dos determinantes dois a dois da matriz 4×4, formando uma matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} 12-10 & 6+8 & -10-9 \\ 4 & 8 & -3-10 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

que é igual a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 14 & -19 \\ 4 & 8 & -13 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Encontrando a transposta finalmente tem-se a adjunta da matriz A.

$$AdjA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 14 & 8 & -4 \\ -19 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Agora, substituindo os valores encontrados em $A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA$,tem-se:

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}.\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 14 & 8 & -4 \\ -19 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{19}{10} & \frac{13}{10} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

5.2 Aplicação 2: Método Salihu 4×4

(ITA - 2010/adaptada) Sobre os elementos da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(R)$$

Sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 225, respectivamente. Então, encontre o valor de $det(A^{-1})$.

Solução:

Esta questão estava presente em um dos vestibulares mais exigentes do Brasil. E na resolução vamos utilizar, primeiramente, o método para determinantes 4×4 de Salihu. Assim, vamos calcular 3 determinantes num método parecido com o de Sarrus, pois $detA = detA_1 + detA_2 + detA_3$. Então, aplicando o método, temos

$$detA_1 = \left| \begin{array}{cccc|ccc} x_1 & \mathbf{x_2} & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & \mathbf{y_3} & y_4 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array} \right| = -(x_2 \cdot y_3 \cdot 1 \cdot 1) = -x_2 \cdot y_3.$$

No qual, os termos em destaque representam o único produto de elementos de uma diagonal que não será nulo e o sinal negativo surgiu por conta do método.

$$detA_2 = \left| \begin{array}{cccc|ccc} y_1 & \mathbf{y_2} & y_3 & y_4 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & \mathbf{x_3} & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array} \right| = y_2 \cdot x_3 \cdot 1 \cdot 1 = y_2 \cdot x_3.$$

Alguns termos estão destacados novamente para representar o único produto não nulo. E por fim,

$$detA_3 = \left| \begin{array}{cccc|ccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0.$$

Neste caso, todos os produtos de diagonais serão nulos. Logo,

$$detA = detA_1 + detA_2 + detA_3 = -x_2 \cdot y_3 + y_2 \cdot x_3 + 0 = y_2 \cdot x_3 - x_2 \cdot y_3.$$

Descobrimos o $detA$ em função de seus elementos, no entanto, podemos descobrir os valores de cada um de seus elementos. Como, Sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 225, respectivamente, temos

i) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + 3x_1 + 9x_1 + 27x_1 = 40x_1 = 80 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow \ x_2 = 6 \Rightarrow \ x_3 = 18 \Rightarrow x_4 = 54.$

ii) $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = y_1 + 4y_1 + 16y_1 + 64y_1 = 85y_1 = 255 \Rightarrow y_1 = 3 \Rightarrow y_2 = 12 \Rightarrow y_3 = 48 \Rightarrow y_4 = 192.$

Desse modo, temos todos os elementos da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = y_2 \cdot x_3 - x_2 \cdot y_3 = 12 \cdot 18 - 6 \cdot 48 = -72.$$

Assim, encontramos $detA$. Portanto, $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{detA} = -\dfrac{1}{72}.$

5.3 Aplicação 3: Método Salihu 4×4

(ITA-2006/adaptada) Sejam as Matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Determine $detC$, sabendo que $C = (A+B)^{-1}$.

Solução:

Usaremos aqui o método de determinantes 4×4 de Salihu.

1º passo: Vamos primeiro encontrar a matriz $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+3 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & -1+1 \\ -2+1 & 5-2 & 2-2 & -3+3 \\ 1-1 & -1+1 & 2+1 & 1+1 \\ -5+5 & 1-1 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2} & 0+5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Agora, podemos encontrar o determinante de $A + B$, pelo método de Salihu, temos que $det(A+B) = det(A+B)_1 + det(A+B)_2 + det(A+B)_3$, assim

$$det(A+B)_1 = \left|\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{2} & 3 & 0 & 0 & 2 & \mathbf{3} & 0 \\ -1 & \mathbf{3} & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & 0 & 0 & 2 \end{array}\right. = +(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) + (2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3) = 78.$$

$$det(A+B)_2 = \left|\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{-1} & 3 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{3} & 0 \\ 2 & \mathbf{3} & 0 & 0 & \mathbf{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & 0 & 0 & 2 \end{array}\right. = -((-1) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) - (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = 21.$$

$$det(A+B)_3 = \left|\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right. = 0.$$

Nos dois primeiros determinantes, os termos destacados representam as diagonais em que o produto não é nulo, já no último caso, todos os produtos são iguais a zero. E além disso, os sinais em evidência fazem parte do método. Logo,

$$det(A+B) = det(A+B)_1 + det(A+B)_2 + det(A+B)_3 = 78 + 21 + 0 = 99.$$

Portanto,

$$detC = det(A+B)^{-1} = \frac{1}{det(A+B)} = \frac{1}{99}.$$

5.4 Aplicação 4: Método Thirumurugan 3×3

(Unicamp-2006) Dado a matriz A, encontre o conjunto solução da equação $detA = 0$. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Utilizando terceiro método de Thirumurugan, temos

$$detA = \begin{array}{c|ccc|c} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ & x-1 & 1 & 2 & \\ -2 & x-1 & 1 & -2 & x-1 \end{array}$$

Calculando as diagonais, temos

$$\begin{aligned} detA &= +(x-1)^2 + (-2 \cdot (x-1)) + 2(x-1)^2 - (-2 \cdot (x-1)^2) - (x-1)^2 - 2 \cdot (x-1) \\ \Rightarrow detA &= 4 \cdot (x-1)^2 - 4(x-1) = 4(x-1)(x-1-1) = 4(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Como queremos, $detA = 0$ então $4(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x = 2$.

Portanto, o conjunto solução da equação $detA = 0$ é $\{1, 2\}$. Vale ressaltar que para esses valores a matriz A não é invertível.

5.5 Aplicação 5: Método Salihu 5×5

Seja A uma matriz de ordem 5×5, calcule seu determinante. Sabendo que A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Neste resolução usaremos o método para determinantes de Salihu para matrizes de ordem $n \geq 3$. O método nos fará calcular, primeiramente, um determinante $(n-2) \times (n-2)$ e outros três $(n-1) \times (n-1)$ que no nosso caso serão, 3×3 e 4×4, respectivamente. Assim, de acordo com o método, temos

$$detA_{5\times5} = \frac{1}{detB_{3\times3}} \cdot \begin{vmatrix} detC_{4\times4} & detD_{4\times4} \\ detE_{4\times4} & detF_{4\times4} \end{vmatrix}.$$

Após esse processo, teremos transformado uma matriz de ordem 5×5 em uma matriz de ordem 2×2, e isso é o que mais chama atenção nesse método. Vamos aos cálculos. Pelo método de Thirumurugan,

$$detB_{3\times3} = \begin{array}{c|ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & \\ 4 & -3 & 0 & 4 & -3 \end{array} = -(5 \cdot (-1) \cdot (-3)) = -15.$$

Essa matriz $B_{3\times3}$ foi formada pelos elementos centrais da matriz A. Assim, para encontrar os determinantes das matrizes de ordem 4×4 usaremos Salihu especificamente para esse tipo de matriz. Logo,

Pelo método de Salihu para $n \geq 3$, a matriz C é encontrada eliminando a linha e coluna do elemento a_{55} da matriz A, então

$$detC_{4\times4} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

A matriz D é encontrada eliminando a linha e coluna do elemento a_{51} da matriz A, então

$$detD_{4\times4} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

A matriz E é encontrada eliminando a linha e coluna do elemento a_{15} da matriz A, então

$$detE_{4\times4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

E por fim, a matriz F é encontrada eliminando a linha e a coluna do elemento a_{11} da matriz A, então

$$detF_{4\times 4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Agora, indo para o método específico de Salihu para matrizes de ordem 4×4. Temos:

1. $detC_{4\times 4} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -75.$

2. $detD_{4\times 4} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 65.$

3. $detE_{4\times 4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -75.$

4. $detF_{4\times 4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 5.$

Logo,

$$detA_{5\times 5} = \frac{1}{detB_{3\times 3}} \cdot \begin{vmatrix} detC_{4\times 4} & detD_{4\times 4} \\ detE_{4\times 4} & detF_{4\times 4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{vmatrix} -75 & 65 \\ -75 & 5 \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$detA_{5\times 5} = -\frac{(-75 \cdot 5 + 65 \cdot 75)}{15} = -\frac{60 \cdot 75}{15} = -300.$$

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho trouxe a proposta de alguns métodos para estabelecer os determinantes e matrizes inversas além de compor um modo mais fácil de utilizar a fórmula da matriz inversa para matrizes de ordem 3. Os modelos propostos foram determinados através da análise de artigos que já abrangiam o assunto. Uma proposta para trabalhos futuros será a aplicação dos metódos no ensino médio e analisar o nível de compreensão dos alunos para tal assunto.

Referências Bibliográficas

BERNARDES, A. C. da S. História e ensino de matrizes: Promovendo reflexões sobre o discurso matemático. *Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2016.

FONSECA, J. J. S. da. *Metodologia da pesquisa científica.* 1. ed. Fortaleza, Ceará: LTC, 2002.

IEZZI, G. *Matemática ciência e aplicações.* 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2.

IEZZI, S. H. G. *Fundamentos da matemática elementar.* 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 4.

LAGES, E. *Geometria analítica e álgebra linear.* 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013. v. 1.

PRODANOV, E. F. C. *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico.* 2. ed. Rio Grande do Sul: Universidade Feevale, 2013. v. 1.

SALIHU, A. New method to calculate determinants of $(nxn)(n \geq 3)$. *International Journal of Algebra*, 2012.

SALIHU, Q. D. G. A. New method to compute the determinant of a $4x4$ matrix. *International Mathematics Conference on Algebra and Functional Analysis*, 2009.

THIRUMURUGAN, K. A new method to compute the adjoint and inverse of a 3x3 non- singular matrices. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention*, 2014.

WIKIPEDIA. *Sarrus Rule.* 2012. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File: Sarrus_rule.svg>. Acesso em: 27 out. 2019.