A não enumerabilidade do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e a desordem no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

The non-enumerability of the set $\mathbb{R}$ of the real numbers and a disorder in the set $\mathbb{C}$ of the complex numbers.

Josimauro Borges de Carvalho [1]
Jhonny Oliveira Pereira, Rodrigo Coelho Gomes [2]

Resumo

O ensino de Análise Real e Álgebra Linear é de importância incalculável na área da matemática superior, dada sua grande utilização nas mais diversas linhas de pesquisa nos cursos de pós-graduação. A sua abordagem na parte de topologia, números reais e espaços vetoriais traz uma contribuição para o aprendizado paralelo à sala de aula. Esse texto se mostra como um instrumento de auxílio, de pesquisa e cooperação para a comunidade escolar e, claro, fortificando o conhecimento e a aprendizagem dos acadêmicos. Há alguns questionamentos a serem esclarecidos: É possível enumerar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais? O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é ordenado e completo? Existem dois corpos ordenados não isomorfos? Apresentando algumas propriedades e exiomas mostramos a resposta para cada um destes questionamentos. O texto tem caráter elementar pelo fato de que, a princípio, os resultados terem sidos escritos para acadêmicos iniciantes do curso de matemática, embora, se estendesse também aos amantes da matemática em geral. Os resulados aqui apresentados são produto de estudos e seminários que foram realizados pela equipe.

Palavras-chave: Corpo, enumerabilidade, reais, complexos.

Abstract

The teaching of Real Analysis and Linear Algebra is of incalculable importance in the area of higher mathemats,ic given its wide use in the most diverse lines of research in graduate courses. Its approach in the area of topology, real numbers and vector spaces brings a contribution to parallel learning in the classroom. This text shows itself as an aid, research and cooperation instrument for the school community and, of course, strengthening the knowledge and learning of academics. There are some questions to be clarified: It is possible to enumerate the set $\mathbb{R}$ of the real numbers? Is the $\mathbb{C}$ set of complex numbers ordered and complete? Are there non-iomorphic ordered bodies? Presenting some features and language, we show the answer to each of these questions. The text has an elementary character due to the fact

[1]Departamento de Matemática-UEA-jbcarvalho@uea.edu.br
[2]Acadêmicos do curso de Matemática-UEA.

that, at first, the results were written for academic beginners of the mathematics course, although it also extended to mathematics lovers in general. The results presented here are the product of studies and seminars that were presented by academics from CEST-UEA and also from NESEIR-UEA.
Keywords: Field, enumerability, real, complex.

Introdução

A matemática dedutiva, tal qual a conhecemos hoje, tem sua origem com Tales de Mileto, no século VI a.C. [5] destaca que até esse tempo a Matemática grega era herdeira direta daquela que se desenvolveu na Babilônia e no Egito. Os conhecimentos matemáticos de então, tanto nessas regiões do oriente Médio, como na Índia e na China, eram de natureza empírica. Mas a partir de Tales a Matemática grega vai assumindo o aspecto de um corpo de proposições logicamente ordenadas. Bernhard Bolzano foi quem primeiro falou livremente de conjuntos infinitos. Ele escreveu um livro sobre os paradoxos do infinito, publicado postumamente em 1859, no qual abordava várias questões de natureza filosófica e matemática acerca dos conjuntos infinitos. Richard Dedekind foi mais longe que Bolzano, utilizando a noção de conjunto na construção dos números reais. Mas foi Georg Cantor quem mais avançou no estudo dos conjuntos. Então aparece a definição de conjunto: *por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento.* Para alguns dos conjuntos que conhecemos é possível enumerar seu elementos, ainda que seja uma tarefa interminável. No entanto, para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais surge uma pergunta: é possível emumerar os elementos de $\mathbb{R}$? Existem muitos axiomas e propriedades que apresentam os números $\mathbb{R}$ dos números reais como um corpo ordenado completo. Um espírito mais crítico indagaria sobre a existência dos números reais, ou seja, se realmente se conhece algum exemplo de corpo ordenado completo. Em [8] Um processo de construção dos números reais a partir dos racionais é importante porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí tudo o que importa é que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. Neste contexto, surge uma pergunta relevante: será que existem dois corpos ordenados completos com propriedades distintas? Esta é a questão da unicidade de $\mathbb{R}$, ou seja, existem dois corpos ordenados completos não-isomorfos? Existe outro conjunto, a saber o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, que também é um corpo. No entanto, existem algumas propriedades que são satisfeitas em $\mathbb{R}$ mas em $\mathbb{C}$ não. Daí então surge uma outra pergunta relevante: O conjunto $\mathbb{C}$ nos números complexos é ordenado? No decorrer do texto farems algumas dmonstrações pois segundo [6] as demonstrações são necesssárias para assegurar a verdade dos teoremas.

Conjunto finitos e infinitos

Um segmento de $\mathbb{N}$ é um conjunto limitado e não vazio de naturais que contém todos os naturais menores do que seu elemento máximo. Um conjunto X não vazio arbitrário é dito *finito* se for equipotente a algum segmento de $\mathbb{N}$. Dado $\in \mathbb{N}$, dizemos que um conjunto tem n elementos se for equipotente I_n. Ou seja, o conjunto dos números naturais de 1 até n. isto é equivalente a dizer que existe uma função bijetiva

$$f : I_n \longrightarrow X.$$

Intuitivamente, uma bijeção signifca uma contagem dos elementos de X. Por exemplo, o conjunto $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é finito, é equipotente ao I_5. Um conjunto X chama-se *infinito* quando não é finito. Mais precisamente, X é infinito quando não é vazio e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não se tem a bijeção $f : I_n \longrightarrow X$.

Conjunto enumeráveis e não enumeráveis

O primeiro conjunto com que nos familiarizamos é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Ávila em [1] traz a ideia de enumerabilidade como sendo *conjunto enumerável* a todo conjunto equivalente a $\mathbb{N}$. Um fato surpreendente que surge na consideração de conjunto infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto prórpio. Por exemplo, a correspondência $n \longmapsto 2n$, que ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, ao 3 faz corresponder 6, etc., estabelece equivalência entre conjuntos dos números naturais e o conjunto dos números pares positivos. Note que o conjunto dos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto$\mathbb{N}$; no entando, tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, ou seja, é equipotente a $\mathbb{N}$, tem o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nada contradiz o que já sabemos sobre conjunto finito. Segundo [8] um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. No segundo caso dizemos que X é *infinito enumerável.* Um fato mais surpreendente ainda é que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais também é equivalente a $\mathbb{N}$, isto é, $\mathbb{Q}$ é enumerável. Para provar este fato, considere o conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais positivos. Vamos usar o fato de que *dados os conjuntos* $A_1, A_2, A_3, ...,$ *todos eles enumeráveis, então, sua união* $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...$ *é também enumerável* . Reunindo as frações que são irredutíveis e cuja soma do numerador com o denominador seja constante, temos, por exemplo,

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{2}, \frac{7}{1}$$

é o conjunto das frações com numerador e denominador somando 8. Agora, note que

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$$

é o conjunto das frações com numerador e denominador somando 6. É claro que cada conjunto desses tem um número finito de elementos. Basta então escrevermos todos os conjuntos, em ordem crescente das somas correspondentes, e enumerar as frações na ordem em que aparecem. Todos os números racionais positivos aparecerão nesta lista. Assim, temos uma enumeração dos números racionais. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é enumerável. Agora, passaremos a responder à pergunta feita inicialmente sobre a enumerabilidade do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Em 1874, Geroge Cantor, surpreendeu o mundo com uma de suas principais descobertas importantes sobre conjuntos, a de que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável, isto é, possui cardinaidade diferente da do conjunto dos números naturais. Um fato surpreendente é que o intervalo $(0,1)$ possui a mesma cardinalidade da reta toda. Em [4] há uma demonstração de que o intervalo unitátio $(0,1)$ de $\mathbb{R}$ é não enumerável. Segundo [9], *sendo* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ *uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$, *a interseção* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ *não é vazia.* Na verdade este resultado é conhecido na literatura em geral como *Princípio dos Intervalos Encaixados.* Agora note que $\mathbb{R}$ não é enumerável, de fato, raciocinando por absurdo, suponhamos que todos os números reais estivessem contidos numa sequência (x_n). Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo que não contenha x_1. Em seguida tomamos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ que não contenha (x_2), depois um intervalo $I_3 = [a_3, b_3] \subset I_2$, que não contenha (x_3), e assim por diante. Dessa maneira obtemos uma sequência (I_n) de intervalos fechados e encaixados, tal que $\cap I_n$ conterá ao menos um número real c. Isto contradiz a hipótese inicial de que todos os números reais estão na sequência (x_n), visto que $(x_n) \notin \cap I_n$. Assim, abandonamos a hipótese inicial e concluímos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável. Vale destacar que o conjunto dos números irracionais, denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é enumerável. Segundo [8], tem-se $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é emumerável. Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também o fosse, $\mathbb{R}$ seria enumerável, como reunião de dois conjuntos enumeráveis, pois a reunião de conjuntos enumeráveis é também enumerável.

Corpo

De acordo com [8] um *corpo* é um conjunto $\mathbb{K}$, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições chamadas de *axiomas de corpo.* Para que um conjunto seja considerado um corpo ele precisa satisfazer às seguintes propriedades:

(i) Comutativa da soma: $a + b = b + a$.

(ii) Associativa da soma: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(iii) Associativa do produto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(iv) Distributiva à direita: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Distributiva à esquerda: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

(v) Elemento neutro do produto: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

(vi) Comutativa do produto : $a \cdot b = b \cdot a$.

(vii) Elemento inverso aditivo: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(viii) Elemento neutro da soma: $a + 0 = 0 + a = a$.

(ix) O produto de dois elementos não-nulos é um elemento não-nulo: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

(x) Invesro multiplicativo:$a \cdot (a)^{-1} = (a)^{-1} \cdot a = 1$.

Os conjunto $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos. Todos eles satisfazem essas dez propriedades. Os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e $\mathbb{Z}$ dos inteiros não são corpos.

Ordem e completude

Em $\mathbb{Z}$ temos uma ordem linear compatível com a ordem do suconjunto $\mathbb{N}$ dos naturais, a saber, $-n < 0 < n$, com qualquer natural$n$ e $-n < -m$, sempre que $m < n$, quaisquer que sejam os naturais m e n. Em $\mathbb{Z}$ vale o *algoritmo da divisão* geral, qual seja, dados qualquer inteiro m e qualquer natural n, sempre existem certos inteiros q e r únicos tais que $m = nq + r$ e $0 \leq r < n$. A ordem de $\mathbb{Z}$ é estendida a $\mathbb{Q}$ definindo, como m, $p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$,

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq < np$$

Essa ordem de $\mathbb{Q}$ é linear e faz de $\mathbb{Q}$ um corpo ordenado. Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado é dizer que dentro deste conjunto existe uma ordem, ou seja, existem elementos que são maiores ou menores que outros. Por exemplo, $2 < 5$. Isso não ocorre em $\mathbb{C}$, isto é, dados dois números complexos z_1 e z_2 não se pode dizer que $z_1 > z_2$ ou que $z_1 < z_2$. Pois bem, vejamos aqui as propriedades que fazem de $\mathbb{R}$ um corpo ordenado. Pode ser que em livros diversos você encontre estas propriedades escritas separadamente ou de maneira diferente, mas a essência é a mesma.
Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$

(P1) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

(P2) Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

(P3) Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + y < y + z$.

(P4) Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica em $yz < xz$.

(P5) $0 < x^2$, qualquer que seja $x \neq 0$; em particular $0 < 1$.

Com estas propriedades fica estabelecida a ordem dentro do conjunto dos números reais. Estas propriedades são minuciosamente demonstradas em [4] e [9]. Agora vamos responder à outra pergunta que fizemos inicialmente: o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um corpo ordenado? A resposta é negativa. De acordo com [3] os números complexos podem ser definidos como pares ordenados (x, y) de números reais, que são interpretados como pontos do plano complexo, com coordenadas retangulares x e y, da mesma forma que pensam,os em números reais x como pontos da retra real. É costume denotar um número complexo (x, y) por z, ou seja

$$z = (x, y) = x + iy$$

em que $x = Rez$, $y = Imz$ e i é a unidade imaginária de modo que $i^2 = -1$. De acordo com [2] nenhuma relação de ordem definida no corpo dos complexos é compatível com as operações usuais definidas em $\mathbb{C}$. Pela propriedade $[P5]$ acima, $\mathbb{C}$ não pode ser odenado, pois $i^2 = -1 < 0$. Qualquer que seja o número complexo z, temos $z \leq 0$ ou $0 \leq z$. Se $0 \leq z$, obtemos

$$0 \cdot z \leq z \cdot z \Rightarrow 0 \leq z^2.$$

Se $z \leq 0$, obtemos

$$z - z \leq 0 - z \Leftrightarrow 0 \leq -z \Leftrightarrow 0(-z) \leq -z(-z) \Leftrightarrow 0 \leq z^2.$$

Ou seja, $0 \leq z^2$ qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Em particular, podemos ter

$$0 \leq (1 + 0i)^2 \Rightarrow 0 \leq 1.$$

E também,

$$0 \leq (0 + i)^2 \Rightarrow 0 \leq -1.$$

De $0 \leq -1$, obtemos

$$0 + 1 \leq -1 + 1 \Rightarrow 1 \leq 0.$$

Chegamos numa contradição. Logo $\mathbb{C}$ não é ordenado.

Se $\mathbb{C}$ não é ordenado, já podemos levantar alguma hipótese sobre sua completude. Passaremos agora a responder ao outro questionamento que fizemos inicialmente: Existem dois corpos ordenados completos? A resposta é negativa. Segundo [7] a distinção fundamental entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ reside no fato de que todo conjunto X não vazio de números reais que é limitado superiormente possui um supremo. $\mathbb{Q}$ não tem esta propriedade. De acordo com [4], existe o **Axioma Fundamental da Análise Matemática**: *cada subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *que possui alguma cota superior tem supremo.* Pra entender esta terminologia, vejamos que os elementos de $\mathbb{R}$ são denominados *números reais* ou, simplesmente, *reais.* Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Ou seja, o número b é maior que qualquer elemento do conjunto X. Dado algum subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e algum real c, dizemos que c é *cota superior* de X se nenhum elemento de X for maior do que c. Observe que qualquer número maior do que uma cota superior de X também é uma cota superior de X, ou seja, não há maior cota superior. Se exixtir uma cota superior de X, antão a menor dentre todas essas cotas superiores de X será denominada *supremo* de X, que denota-se por sup$X$. O supremo, se existir, será único. Raciocinando de maneira análoga definimos *ínfimo* do conjunto X. Assim, no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, existe o supremo de qualquer conjunto não vazio limitado superiormente. Por definição, $s =$sup$X$ se, e somente se,

(S1) $x \leq s$ qualquer que seja o elemento $x \in X$ e

(S2) se o real y for tal que $y < s$, então existirá algum elemento $x \in X$ tal que $y < x$.

Veja os casos abaixo.

1. $X = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 5\}$, o número 2 é ínfimo do conjunto X e $2 \in X$. O número 5 é supremo do conjunto X e $5 \in X$. O número 5 é o maior elemento de X por isso é também chamado de *máximo.* O número 2 é o menor elemento de X por isso é também chamado de *mínimo.*

2. $Y = \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 5\}$, o número 2 é ínfimo do conjunto Y e $2 \notin Y$. O número 5 é supremo do conjunto Y e $5 \notin Y$. O conjunto Y não possui maior e nem menor elemento, logo não tem máximo e nem mínino.

Fimalmente responderemos ao último questionamento: Existem dois corpos ordenados não isomorfos? A resposta é negativa. Dois corpos ordenados *completos* quaisquer sempre podem ser considerados iguais, ou seja, do ponto de vista algébrico, chamamos de *isomorfos*. Assim, podemos dizer que $\mathbb{R}$ é o único corpo ordenado completo.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Então existe um isomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ de corpos ordenados, ou seja, uma bijeção que preserva as operações e a ordem dos corpos. Mais precisamente, a bijeção φ satisfaz as propriedades seguintes:

(1) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

(2) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

(3) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$ então $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Estas propriedades dizem que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é único com a característica de corpo ordenado completo, se existe um outro corpo ordenado e completo então é igual a $\mathbb{R}$.

Conclusão

Do que foi estudado, entendemos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável, ou seja, a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é diferente da carnidalidade de $\mathbb{N}$. Note que entre dois números naturais consecutivos não se tem outro número natural. Em relação aos números reais esta questão não se aplica, pois em $\mathbb{R}$ não se tem consecutivos, ou melhor, entre dois númros reais existem infinitos outros números reais. Não é possível enumerar os elementos de $\mathbb{R}$. Outro fato é que os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos, em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ podemos definir umaordem, mas em $\mathbb{C}$ isso não é possível. Logo, $\mathbb{C}$ não é corpo ordenado. Veja que se $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são corpos ordenados, o que diferencia estes dois conjuntos? A resposta está na completeza de $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. A característica que o faz assim é é que todo conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente possui supremo. Mostrou-se a unicidade de $\mathbb{R}$ quanto a este fato. No universo dos números reais ainda existem muitas coisas a serem estudadas. A teoria da topologia, limites e sequências são ferramentas que nos ajudam a explorar tal conjunto.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo S de Souza. Introdução à Análise Matemátoca.2.ed.rev.- São Paulo: Edgar Blucher, 1999.

[2] BASTOS, Raimundo. COSTA, Eudes Antônio. Colocando ordem nos complexos. Colloquium Exactarum, v.4, n.1, Jan-Jun. 2012, p. 33-38. DOI: 105747/ce.212.v04.n1.e043.

[3]BROWN, JAMES WARD. REUEL, V. CHURCHILL. Variáveis complexas e aplicações. Tradução Claus Ivo Doering. 9.ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

[4]DOERING, Claus I. Introdução à Análise Matemática na reta. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[5]EVES, HOWARD. Introdução à história da matemática. Tradução: Higino Domingues. - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. .

[6]FOSSA, John A. Introdução às técnicas de demonstração na matemática.2. ed.ampl.e ver.São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[7] LIMA, ELON LAGES. Elementos de topologia geral. Textos universitários. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[8] LIMA, ELON LAGES. Curso de análise. V.1.14.ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

[9] LIMA, ELON LAGES. Análise real, funções de uma variável. V.1.10ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA 2010.