UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MATERIAL CONCRETO NO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO

MANAUS - AM

2018

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NATÁLIA LIMA DE OLIVEIRA

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MATERIAL CONCRETO NO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO

Projeto de Pesquisa para a elaboração do Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao professor da disciplina TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas. Orientadora: Profª. Mestre Ivanilza Teixeira Barbosa

MANAUS - AM

2018

GOVERNO DO ESTADO DO
AMAZONAS

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **NATALIA LIMA DE OLIVEIRA.**

Aos 27 dias do mês de novembro de 2018, às 19:36 horas, em sessão pública na Sala Nivaldo Santiago da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pelo professor da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Me. Ivaniza Teixeira, Me. Marcos Salvatierra e Me. JOSÉ DE ALCÂNTARA FILHO** a aluna **NATALIA LIMA DE OLIVEIRA** apresentou o Trabalho: **"O ENSINO-APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MATERIAL CONCRETO NO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO."** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,4 à monografia divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Helisangela Ramos da Costa
Presidente da Banca Examinadora

Ivanilza T. Barbosa
Orientador (a)

José de Alcântara Filho
Avaliador 1

Avaliador 2

Natalia Lima

Aluno

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A contingência sempre esteve presente na vida das pessoas, seja ao verificar se é possível que a economia do país entre em colapso nos próximos quatro anos ou analisar as condições climáticas de chuvas na Amazônia que elevam o nível dos rios que impedem o desenvolvimento da agricultura em algumas regiões ribeirinhas, entre outras. A incerteza tem papel fundamental no desenvolvimento de um cidadão indagador nos dias de hoje, quanto antes ele for submetido a situações de aleatoriedade menos favorável em acreditar em supostas verdades que constantemente são lhes apresentadas pelas grandes redes de informação.

Desta forma o estudo da probabilidade se faz essencial no desenvolvimento de um cidadão crítico capaz de duvidar das informações que vos são apresentadas, além de fazer previsões em certas decisões que o cidadão precisa estabelecer em seu cotidiano.

Esta pesquisa tem em vista contribuir com uma metodologia para o ensino da probabilidade por meio da resolução de problemas com auxílio de material concreto, discutindo: *A resolução de problemas torna o ensino da probabilidade significativo em sala de aula*? Visto que em alguns casos este conteúdo nem chega a ser mencionado em sala de aula e quando é citado, é pouco discutido sua aplicabilidade em outras áreas da ciência.

A resolução de problemas, permite que o aluno elabore conjecturas, raciocine diversas estratégias para resolver um problema, enquanto a probabilidade trata dos fenômenos aleatórios ao fazer presunções que auxilie na tomada de decisão em condições de incerteza. Sendo assim, é possível propor uma metodologia que seja capaz de desenvolver no aluno uma análise crítica das informações que são apresentadas diariamente pelas mídias sociais, além de contribuir para a formação de um cidadão critico perspicaz em duas decisões.

Para a proposta de uma metodologia, foi necessário entender como está o processo de ensino da probabilidade no ensino médio hoje em dia. Neste cenário foram propostas as seguintes questões que auxiliaram na constituição deste trabalho: *Como o professor tem planejado as aulas de probabilidade?* Neste enfoque pretende-se analisar as propostas que o professor pretende executar em sala de aula. *Quais metodologias e recursos o professor tem utilizado para as aulas de probabilidade?* Pretende-se verificar se as metodologias e recursos são motivadores e enriquecem o desenvolvimento da aula. *Como os alunos se comportam se defrontando com problemas envolvendo probabilidade em seu dia a dia?* Analisar as estratégias que o aluno sugere para resolver problemas envolvendo a probabilidade em seu contexto sociocultural e verificar se a resolução de problemas auxilia na aprendizagem significativa da probabilidade.

Para o alcance do objetivo proposto, foram definidos os seguintes objetivos específicos: Verificar os procedimentos metodológicos que o professor utiliza para o ensino de probabilidade em turmas do segundo ano do Ensino Médio; investigar como o aluno compreende o conceito de probabilidade em situações de incertezas; aplicar uma metodologia no ensino de Probabilidade através da resolução de problemas e material concreto e analisar os resultados obtidos aplicação desta metodologia no ensino da probabilidade.

Este trabalho está subdividido em três capítulos. No primeiro, apresentamos o referencial teórico que justifica a proposta metodológica proposta, a ação docente, as análises e conclusões. No capítulo seguinte, explicamos como foram executadas as atividades para a aplicação da metodologia. E no último, descrevemos os resultados obtidos com as atividades propostas envolvendo a metodologia da resolução de problemas e material concreto. .

CAPITULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

1.1. Aspectos Históricos

A teoria da Probabilidade foi estabelecida como área de estudo da Matemática por volta do século XV, apesar de ter se iniciado como ciência muito antes desse período. Seus princípios apareceram sobretudo por meio dos jogos de azar. Conforme citam registros, por volta de 1200 a.C., um pedaço de osso do calcanhar *astragalus* era utilizado formando faces como as de um dado. Antes disso, por volta de 3500 a.C., no Egito, já existiam jogos utilizando ossinhos. Os Romanos também eram fanáticos por jogos de dados e cartas que, durante a Idade Média, foram censurados pela Igreja Cristã. (LOPES, 2005).

Jerónimo Cardano (1501-1576) matemático e jogador italiano, estudou teoria das probabilidades com o intuito de verificar as possibilidades em ganhar vários jogos de azar. Analisou as viabilidades ao retirar azes de um baralho de cartas e de obter “setes” com dois dados além de registrar os resultados dessas análises em um manual para jogadores chamado “Liber de Ludo Aleae ” (O livro dos jogos de azar - 1526). (LOPES, 2005).

Cardano foi o primeiro a fazer observações que salientam o conceito da probabilidade no lançamento de um dado honesto além disseminar um fundamento teórico para calcular probabilidades. Ele estabeleceu que, ao lançar os dados aleatoriamente, a sorte de se obter um, três ou cinco era a mesma de se obter dois, quatro ou seis, o que se entende hoje como eventos equiprováveis. (LOPES, 2005).

Certos autores outorgam a origem das probabilidades através de escrituras cartas entre Pascal e Fermat ao qual relatavam diversas hipóteses para se obter soluções para resolver os problemas de jogos de azar, em 1653, por Chevalier de Méré, conhecido como filósofo do jogo à qual se propôs uso da Matemática para determinar as apostas nos jogos de azar. (LOPES, 2005).

A Probabilidade teve um grande encorajamento em 1657, com a publicação do primeiro tratado formal sobre probabilidades escrito pelo físico, geômetra e astrônomo holandês Christian Hygens. Ao desenvolver o conceito de esperança matemática ao qual obteve grande relevância para o Cálculo de Probabilidades e Estatística utilizado atualmente. Logo depois, em 1713, foi expandido teoricamente o primeiro livro formalmente fundamentado à teoria das probabilidades de autoria de Jakob Bernoulli (1654-1705). Uma parte desse livro é apresenta à reedição do trabalho de Huygens sobre jogos de azar, a outra parte trata de permutações e combinações, chegando ao teorema de Bernoulli sobre as distribuições binomiais. (LOPES, 2005)

A probabilidade além de ter suas raízes na solução de problemas de jogos também as tem no processamento de dados estatísticos. Os problemas estatísticos mais importantes que requerem o pensamento probabilístico originam-se no processo de amostras. (LOPES, 2005)

Em 3000 a.C., já se realizavam censos na Babilônia, China e Egito. Há registros de que o rei chinês Yao, nessa época, ordendou fazer uma verdadeira estatística agrícola e um levantamento comercial do país. Na Grécia, apareceram registros de levantamentos estatísticos, Mirshawka (1975) relata: Os romanos registravam dados demográficos por meio de um documento cuidadoso dos nascimentos e das mortes de sua população. Os objetivos desses censos variavam desde utilizar o número de habitantes para taxação e cobrança de impostos até verificar o número de homens aptos a guerrear. (LOPES,2005).

Na Inglaterra, em 1085, foi feito um dos primeiros registros de levantamento estatístico, denominado "Doomsday Book", onde constavam informações sobre terras, proprietários, uso da terra, empregados, animais e servia também, de fundamento para o cálculo de impostos. No século XIII, na Itália, registros estatísticos foram realizados com frequência, quando a igreja introduziu a inscrição obrigatória dos matrimônios, dos nascimentos e das mortes. (LOPES, 2005)

No século XVII, na Inglaterra, época de epidemia de pestes, surgiram as Tábuas de Mortalidade, desenvolvidas por John Graunt (1620-1674), que consistia em muitas análises de nascimentos e mortes, de onde se concluiu que a porcentagem de nascimentos de crianças do sexo masculino eram superiores à de crianças do sexo feminino. Além de ter sido o primeiro a fazer inferências estatísticas através da análise de dados, Graunt tornou-se importante referência na história da Estatística. Ainda hoje, tábuas de mortalidade são utilizadas por seguradoras. (LOPES, 2005).

1.2 Ensino de Probabilidade no Ensino Médio

O pensamento determinístico não é suficiente para compreender alguns ramos da ciência, o caráter arbitrário de fenômenos naturais ou imprevisíveis estão cada vez mais imersos nos campos da biologia, física, economia e entre outros. A teoria das probabilidades é a parte da matemática que nos ajuda a entender diversos acontecimentos do cotidiano que não são possíveis de prever.

Conforme o avanço tecnológico vem se expandindo na sociedade o cidadão está em constante contato com as informações, que nem sempre são de fontes fidedignas, muitas vezes com propósitos questionáveis e não verídicas, assim as notícias devem ser avaliadas quanto à veracidade. Desta forma o conhecimento Estatístico e Probabilístico é muito importante atualmente, pois permite que o aluno desenvolva analises críticas das informações ou dos dados em seu meio social.

Nesta proposta, restringimos nossas analises na definição de probabilidade clássica, ou de acordo com Busetto (2010), a definição de Laplace: Dado um espaço amostral Ω e A um evento de Ω, a probabilidade de um evento A ocorrer é dado por: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, em que $n(A)$: é a quantidade de casos favoráveis de A ocorrer e $n(\Omega)$: a quantidade de casos possíveis, desde que Ω seja um espaço amostral equiprovável, que consiste em todos os eventos desse espaço amostral terem a mesma probabilidade de ocorrer.

Um dos objetivos da matemática no Ensino médio visa que o aluno deve aplicar seus conhecimentos matemáticos em situações diversas, a qual o permita a utilizar interpretações seja nas ciências, nas atividades tecnológicas e em seu cotidiano, uma vez que o ensino da estatística e da probabilidade instiga o desenvolvimento da capacidade crítica e autônoma do aluno para que execute abundantemente sua cidadania.

> É fundamental na preparação para a cidadania, o domínio de um conteúdo relacionado com o mundo real. O significado disto nas disciplinas das áreas sociais - geografia, história, literatura, etc. - não contestado. Embora mesmo nessas disciplinas ainda haja muito a desejar com relação a uma totalidade política, tem havido muito progresso e uma aceitação geral de que isso seja importante. (D'AMBROSIO, 1996, p. 86)

O ensino da Matemática no Ensino Médio é constituído por temas estruturadores que visam o desenvolvimento de habilidades com relevância científica e cultural, quanto aos conteúdos matemáticos são organizados em três eixos estruturadores: Álgebra lida com números e funções, Geometria e Medidas, tratam das formas planas e tridimensionais e Análise de Dados que se ocupa do estudo dos conjuntos finitos de dados podendo ser numérico ou informações qualitativas. A probabilidade é descrita pelo PCNEM (2002) no tema estruturador de Análise de Dados. Os conteúdos e habilidades propostas para a probabilidade a ser desenvolvida nas turmas do segundo ano do Ensino Médio, são:

- Cálculo de probabilidades;
- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, compreendendo o conceito e a importância da probabilidade como meio de prever resultados;
- Quantificar e fazer previsões aplicadas a diferentes áreas do conhecimento, que envolvam o pensamento probabilístico;
- Identificar em diferentes áreas científicas o uso da probabilidade.

Essa perspectiva exige uma prática pedagógica que promova a investigação e a exploração, tornando possível aos estudantes tomarem consciência de conceitos estatísticos e probabilísticos, que os auxiliem em sua leitura de mundo. Os PCNEM (2002, p. 12) estabelecem que a "probabilidade deva ser vista como procedimentos que permitem aplicar a matemática em questões do mundo real, mais especialmente em diversas áreas do conhecimento".

Porém, nas escolas públicas, os professores continuam restritos em apenas a visualizar o estudo da probabilidade nos jogos de azar como dados, roletas e urnas, esquecendo-se das diversas aplicações em análise de custo, seguros de vida, etc. Em alguns casos nem chega a ser discutido em sala de aula o assunto por falta de domínio do conteúdo e em alguns casos desconhece sua importância no currículo.

> O ensino tradicional da Estatística segue o modelo de aulas expositivas baseadas em apostilas ou livros clássicos no Ensino da Estatística. Neste modelo, a distribuição dos conteúdos é linear e a prática na maioria das vezes é feita com exercícios e exemplos desses livros que não raros são distantes da realidade e a experiência do aluno e do professor (BRIGNOL, 2004, apud, SCHNEIDER, 2013, p.9).

Cabe ressaltar que apenas o estudo de probabilidade não resolve o problema que persiste na Educação Matemática das Escolas. Os diversos temas estruturadores da matemática como álgebra e geometria proposto pelo PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio) também são fundamentais.

> Verificamos o objetivo de desenvolvermos a capacidade crítica e autonomia desse aluno para que exerça plenamente sua cidadania, ampliando suas possibilidades de êxito na vida pessoal e profissional. Não estamos dizendo com isso que apenas o estudo desses temas seja o suficiente, mas sem dúvida permite ao estudante desenvolver habilidades essenciais, como a análise crítica e argumentação. (LOPES, 2008, p. 60).

Não basta que o professor priorize o ensino da matemática utilizando apenas fórmulas e teoremas, ele deve despertar criticidade, desenvolver o raciocínio lógico, na qual, são características necessárias para o exercício da cidadania, D'Ambrosio (1996, p.90) nos orienta "[...] A função do professor é a de um associado aos alunos na consecução da tarefa, e consequentemente na busca de novos conhecimentos. Alunos e professores devem crescer, social e intelectualmente, no processo. [...]".

A sala de aula sendo um espaço político de formação de conhecimento, ambiente de socialização e de educação democrática não permite que o professor pense que sua ação não faz interferência nenhuma na sociedade. Ele precisar fazer com que o aluno compreenda a importância da utilização da probabilidade neste contexto sócio econômico cultural no qual está inserido.

> Educação é um ato político. Se algum professor julga que sua profissão é politicamente neutra, não entendeu nada de sua profissão. Tudo o que fazemos, o nosso comportamento, as nossas opiniões e atitudes são registrados e gravados por nossos alunos. (D'AMBROSIO, 1996, p. 85).

A educação matemática busca diferentes alternativas que proporcionem o encorajamento do professor que incentive a socialização das diferentes soluções apresentadas pelos alunos em relação a situações problemas. Através da probabilidade em sala de aula é possível abrir diferentes cenários de investigação, que auxilie a formação de um aluno mais crítico, propondo o embate com problemas. Assim, para esta proposta, a resolução de problemas é fundamental de tal forma que contribui para análise e questionamentos, a probabilidade lida com incertezas, onde é preciso que se analise não apenas uma partição de um conjunto mais todo conjunto universo de um experimento aleatório.

> Se o ensino de Matemática se deve ocupar mais de uma forma do pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que o estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental. (BERNARDES, 1987, apud LOPES 2008 p. 13).

Neste contexto educacional é que o ensino da Estatística e da Probabilidade se insere, fazendo emergir discussões sobre sua relevância na formação do aluno desde a escola básica ao Ensino Médio.

> Uma das grandes competências propostas pelo PCNEM diz respeito à contextualização sócio cultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações que lhe permitam conhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta sociedade. (BRASIL, 2002, p. 126).

É através de diversas formas de ensinar Matemática, que o aluno interpreta diversos conceitos matemáticos e procura criar hipóteses e conjecturas a partir de uma situação problema.

1.3 O Ensino de Probabilidade por meio da resolução de problemas

A resolução de problemas como temática de ensino nos possibilita desenvolver habilidades essenciais para a tomada de decisão. Conforme os PCNEM (2002), é possível instigar o raciocínio do pensamento lógico, visto que nesta prática metodológica não se realiza a aplicação de conceitos recém-propostos.

O pensamento Probabilístico e estatístico, trabalhado por meio da resolução de problemas desenvolve habilidades necessárias para o pensamento crítico. O ato de fazer questionamentos, buscar novas soluções e analisar as estratégias propostas são primordiais para o alce da educação crítica. Uma vez que a análise dos dados tratados em estatística e probabilidade se fazem essenciais para interpretação aprofundada de um experimento aleatório.

> Acreditamos que não faz sentido trabalharmos atividades envolvendo conceitos estatísticos e probabilísticos que não estejam vinculados a uma problemática. Propor coleta de dados desvinculada de uma situação problema não levará uma análise real. Construir gráficos e tabelas, desvinculados de um contexto ou relacionados a situações muito distantes do aluno pode estimular a elaboração de um pensamento, mas não garante o desenvolvimento de sua criticidade. (LOPES, 2008, p. 62).

Mas afinal, o que realmente é um problema? Dante (1998, p. 12) afirma que um “problema consiste em uma situação que o indivíduo ou grupo necessita resolver, onde o caminho que o leve à solução não é rápido e tão pouco direto”. Os problemas estão em nosso cotidiano constantemente e a busca de suas respostas nos conduzem a descobrir diferentes caminhos que façam os alunos refletir a sociedade em que atuam, a Matemática nos sugere diversos mecanismos, convém aos professores desempenharem seu papel político e mediador do conhecimento procurar situações reais que podem ser matematizadas. Segundo Lopes, (2008):

> A resolução de problemas, que é o princípio norteador da aprendizagem matemática, pode possibilitar o desenvolvimento do trabalho com a estatística e a probabilidade em sala de aula, pois da mesma forma que a matemática, a estatística se desenvolveu através da resolução de problemas de ordem prática na história da humanidade. (LOPES, 2008, p. 62).

Os PCNEM (2002) conceitua a resolução de problemas, como uma proposta metodológica interdisciplinar que sugere um fato a ser questionado. Uma temática que propõe o desenvolvimento de uma estratégia propostas pelos alunos, na qual suas hipóteses são declaradas no processo de solução. Segundo Polya (1995), a resolução de problemas consiste:

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado, se o fim por si só não sugere os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente como alcançar o fim, temos um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão. (POLYA, 1995, p.124).

Um problema implica a interpretação e estratégia para uma resolução, o que proporciona ao professor desenvolver nos alunos, confrontos com problemáticas que buscam elaborar estratégias para a resolução de problemas diversificados que lhe surgiram ao longo da vida. Que são características essenciais para a educação crítica.

Nossa proposta metodológica consiste em desenvolver uma prática de ensino da probabilidade por meio do processo de resolução de um problema, conforme Polya (1995) em sua obra: "A arte de resolver problemas" que propõe quatro fases para resolver um problema:

Qual a probabilidade de, aleatoriamente, escolhermos um número par dentre os elementos do conjunto {1,2, 3, 4, ... , 21,22,23}?

Primeiro passo: Para resolver um problema é preciso compreendê-lo bem, saber o que exatamente é dado e o que é pedido:

- Ler o problema com bastante atenção se preciso mais de uma vez até que esteja bem definido.
- Atentar-se para os dados do problema, tomar nota das quantidades e das condições. Verificar que se trata de um conjunto de números naturais e verificar a possibilidade de escolha de um número par.

- Identificar as incógnitas e as condicionantes, que tipo de probabilidade se sugere calcular?
- Reformular o problema de formas diferentes formas, pensá-lo numa situação concreta que te seja mais familiar. Analisar o espaço amostral e os casos favoráveis entre números pares e ímpares.

Segundo passo: Planejar uma estratégia para resolver o problema, uma vez que já se identificou que se trata de situações que envolvam conceitos de probabilidade.

- Revisar como se calcula a probabilidade: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, onde $n(A)$ número de casos favoráveis do evento A ocorrer e $n(\Omega)$o número de casos possíveis.
- Esquematize o espaço amostral e os casos favoráveis do experimento aleatório proposto.

Terceiro passo: Executar a estratégia planejada, utilizar o conhecimento de probabilidade para calcular a probabilidade de retirar um número par do conjunto.

- Analise bem os esquemas elaborados, revendo os com cautela o espaço amostral do experimento aleatório sugerido no problema.
- Verificar de novo as possibilidades de cada evento sair par e sair impar do espaço amostral e confirmar se não há erros que afetem a solução final.

Quarto passo: Verificar e interpretar os resultados obtidos

- Conferir se os resultados obtidos fazem sentido.
- Verificar os cálculos, ou até tentar refazê-los.
- Escreva a solução final de forma clara e concisa, usando uma linguagem simples sem qualquer margem para ambiguidade. A probabilidade de se retirar um número par é de 47,82% de chance.

Claro, que conforme a metodologia do professor, os passos de Polya ainda são insuficientes, é crucial que o professor esteja disposto a novos desafios, redescobrindo novas propostas de ação para o alcance dos resultados planejados.

Resolver um problema consiste um processo demorado composto de diversas etapas, é importante frisar isso em sala de aula para que os alunos não se decepcionem no decorrer do processo, pois, quando o aluno consegue resolver um problema rapidamente, sua autoestima se engrandece, porém isso não significa que em um problema posterior sua resolução será concluída em menos tempo que o anterior, pois este processo estimula os alunos a fazerem conjecturas para rastrear diferentes soluções.

> Em seu papel formativo, a Matemática, contribui para o desenvolvimento de processo de pensamento e aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar o aluno a capacidades de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criticidade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2002, p. 40).

A resolução de Problemas deve propor um ambiente de investigação, que proporcione questionamentos e argumentação para resolver uma problemática no contexto sócio cultural do aluno, assim o professor inserir ferramentas que auxilie os alunos neste conjunto.

> A resolução de problemas deve sugerir um espaço onde o professor não ajude demais e nem de menos, auxiliando na medida certa, proporcionando subsídios para que os alunos consigam pensar em estratégias para resolver o problema, muitas problemas exigem algum conhecimento ou habilidade adquirida em sala de aula para sua resolução, assim o professor deve preparar o aluno para que tenha as ferramentas necessárias para a resolução. (POLYA,1995, p.1)

No trabalho de Onuchic (2011) nos sugere algumas razões para acreditarmos na resolução de problemas, em manter o foco da atenção dos alunos, desenvolve a capacidade de pensar matematicamente, aperfeiçoa a confiança dos alunos em relação a seu aprendizado matemático. Além de permitem que os alunos avaliem todo o processo da resolução, os professores se sentem empolgados para não abandonarem esta metodologia e além de possibilitar aos alunos um sentido matemático mais ativo em seu cotidiano.

1.4 O uso do Material Concreto no Ensino de Matemática

O ensino da Matemática necessita dos professores variação em suas práticas pedagógicas, com o intuito de conduzir o aluno no processo de aprendizagem, o uso do material concreto no ensino da matemática é uma opção estimulante a qual permite o desenvolvimento de habilidades como observação, tomada de decisão, argumentação e organização, habilidades primordiais para formação de um cidadão crítico. Lorenzato apud Rodrigues (2012) propõem que os materiais concretos podem ser o início para o aluno estabelecer seu pensamento matemático.

Também conhecidos como materiais manipuláveis segundo Matos e Serrazina apud Rodrigues (2012) são definidos como objetos ou coisas que o aluno seja capaz de manipular, são incluídos nessa definição pincel, calculadora, jogos, cartaz e etc. Lorenzato apud Rodrigues (2012) o chama de material didático definido como qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem, sendo classificados em: material concreto estático, não se altera a estrutura física por meio de sua manipulação e material concreto dinâmico à qual conforme a manipulação a estrutura física é modificada.

Os materiais concretos no ensino da matemática podem desempenhar diversas funções, por isso é importante que o professor planeje com cautela o uso desses materiais em sua prática docente, pois eles mal explorados podem conduzir à uma aprendizagem ineficiente no aluno. Uma vez que esses recursos didáticos apenas são subsídios de ensino à disposição professor e do aluno.

> O material didático nunca ultrapassa a categoria de mero auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o material dinâmico, não é garantia de um bom ensino, em de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor. (LORENZATO, 2006, apud RODRIGUES, 2012 p. 18).

Conforme Rêgo e Rêgo apud Rodrigues (2012) em sua obra Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino da matemática, nos apresentam alguns cuidados básicos na utilização de materiais concretos em nossa prática pedagógica.

- Estipulem um tempo para que os alunos conheçam e explorem bem o material;
- Incentive a comunicação e a troca de ideias, além de discutir com os alunos diferentes estratégias envolvidas;
- Seja criterioso na escolha do material;
- Planeje com antecedência as atividades pedagógicas, procure conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que sejam explorados de forma eficaz.

CAPITULO 2

METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1 Abordagens metodológicas

Nossa pesquisa é caracterizada como quantitativa e qualitativa, a abordagem de processos mistos segundo Creswell (2010) permite que, o pesquisador fundamenta a investigação na conjectura de que a coleta de diversos tipos de dados garante um entendimento melhor do problema de pesquisa.

2.2 Sujeitos da pesquisa

Os sujeitos de nossa pesquisa são o professor e os alunos, inicialmente foi feito um estudo amplo em uma escola Estadual (Escola 1) localizada na zona oeste de Manaus, no turno vespertino, no período de 14/11/2017 a 07/12/2017, acolhido por um professor que leciona matemática para sete turmas do segundo ano do Ensino Médio, na qual foi possível realizar observações das aulas ministradas, porém, devido ao encerramento do ano letivo não foi possível realizar as aulas sugeridas nessa investigação, sendo assim nossa intervenção precisou ser adaptada para um estudo de caso com uma turma do segundo ano do ensino médio composta por quarenta e três alunos com faixa etária entre quinze a dezessete anos, em uma Escola Estadual (Escola 2), localizada na zona sul de Manaus, a pesquisa foi desenvolvida em sala de aula no período de 27/07/2018 a 24/08/2018, no turno vespertino, acolhida por uma professora que leciona matemática para quatro turmas de primeiro ano e uma de segundo ano do Ensino Médio, nossa abordagem foi realizadas após as aulas que foram ministrados os conteúdos de análise combinatória, pois a professora titular não havia inserido em seu plano de ensino o estudo da probabilidade no respectivo ano letivo.

Primeiramente havia sido elaborado um roteiro de entrevista para os professores das escolas 1 e 2, porém os dois professores se recusaram a se manifestar, desta forma nossos resultados apenas possuem base nas aulas observadas na Escola 1, nas aulas propostas para ação da metodologia proposta e a avaliação realizadas na Escola 2.

2.3 Instrumentos de coleta de dados

Para o alcance dos resultados obtidos foram realizadas observações das aulas efetivadas na Escola 1, em que foi ministrada a probabilidade conforme o roteiro de observação **Apêndice A**, ocorreu a análise dos seguintes aspectos:

- Planejamento, verificou-se que o professor não realizou um plano de ensino para ministrar a probabilidade em sala de aula, o mesmo apenas abordou o conteúdo propondo situações probabilísticas no contexto de jogos de azar como por exemplo o jogo da roleta, lançamento de um dado honesto.
- A interação dos alunos com o conteúdo, os alunos sentiram bastante dificuldades em compreender as situações problemas que o professor titular sugeria para resolver.
- Verificar as principais dúvidas e dificuldades que os alunos apresentam com relação aos conceitos básicos da probabilidade e situações problemas, os alunos não conseguiam dominar os conceitos de espaço amostral e evento.

Para a execução da temática desenvolvemos quatro planos de aula efetivadas na Escola 2, conforme os **Apêndices B, C, D** e **E** que apresentou a proposta de ensino de probabilidade por meio da resolução de problemas.

No plano de aula 1 (**Apêndice B**), com o através do jogo senha, sugeri que a turma formassem grupos de dois e distribui para cada aluno quatro fichas coloridas por meio da interação dos alunos com o jogo, introduzi os conceitos básicos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e cálculo de probabilidades para eventos equiprováveis, além de ter apresentado uma situação problema explorada pelo jogo para calcular a probabilidade de um segundo jogador acertar a sequência de cores na primeira tentativa.

No plano de aula 2 (**Apêndice C**), apresentei situações problemas que envolvem o conceito de probabilidade, no exercício 1, sugeri que calcular a probabilidade de retirar um número par de um determinado conjunto, desenvolvi as etapas estratégias para que os alunos aprendessem o método e identificassem a quantidade de casos possíveis dos caos favoráveis de uma situação problema. No exercício 2, dado dez pessoas em uma fila verificar a probabilidade de existir quatro pessoas entre Marcos e Paulo, com este exercício sugeri que fosse utilizado o conceito de fatorial para auxiliar na contagem dos casos favoráveis e dos casos possíveis. Os problemas são resolvidos conforme as quatro fases para resolver um problema proposto por Jorge Polya. Em, seguida é apresentei um exercício de fixação que baseia-se em dois dados honestos, ao verificar a probabilidade das faces voltada para cima, a soma resultar em 10. Busquei verificar se os conceitos apresentados em sala de aula foram registrados pelos alunos.

No plano de aula 3 (**Apêndice D**), foi proposto uma situação problema que narra a extinção da ararinha azul no Brasil, onde supõem-se um cativeiro conter cinco exemplares de 5 machos e 8 fêmeas, neste contexto sugere identificar a probabilidade de se retirar duas ararinhas azuis e elas serem do mesmo sexo e a probabilidade de retirar duas ararinhas azuis e formarem um casal. Foi proposto que fosse utilizado o conceito de combinação para a contagem dos casos possíveis e favoráveis, além de ter sido demonstrado por meio do material concreto as combinações realizadas neste cálculo.

No plano de aula 4 (**Apêndice E**) foi apresentado uma situação problema do Exame Nacional do Ensino Médio 2014, que trata de verificar um teste diagnóstico em um estudo de uma amostra de pacientes em sadios e doentes, na qual o problema sugere encontrar a probabilidade de o resultado do teste der positivo e o paciente estiver com a doença, buscando questionar a turma e convidando os alunos para proporem hipóteses para solucionar o problema, além de retornar a apresentar os conceitos básicos como espaço amostral e evento através do material concreto.

Para analisarmos a ação pedagógica da resolução de problemas no ensino da probabilidade foi aplicada uma avaliação no final das aulas de probabilidade conforme o **Apêndice F**. As questões da avaliação apresentaram diversas situações problemas similares trabalhadas nas aulas propostas, as questões foram tabuladas em certo ou errado onde no capítulo posterior apresentamos a porcentagem dos resultados.

No caso da questão 1, foi dado uma tirinha que narra uma situação que consiste num pássaro que convida o macaco para jogar o ímpar ou par, em seguida é questionado ao aluno se seria possível determinar um vencedor, sendo assim possível analisar como o aluno distingue situações determinísticas de aleatórias.

Na questão 2, é apresentada uma situação ambiental alertando para extinção do peixe boi da Amazônia, considera-se que existam 3 machos e 4 fêmeas em um cativeiro, sugere-se que o aluno descubra a probabilidade de se retirar do cativeiro duas fêmeas, através desta questão será possível verificar o processo de aprendizagem da probabilidade e avaliar se a metodologia da resolução de problemas com a composição de material concreto foi gratificante.

Na questão 3, aplicada no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), no ano de 2011, analisou-se como o aluno resolve uma situação problema que envolva o cálculo de probabilidades foi sugerido que o aluno encontrasse a probabilidade de se escolher uma pessoa atendida em um posto de vacinação seja portadora da doença proposta no problema.

Na questão 4, com o intuito de verificar se o aluno registrou o método da resolução de problemas, foi sugerido uma problemática que consistia em encontrar a probabilidade de se retirar um número ímpar de um conjunto de números naturais de 10 a 30, na qual o aluno deveria marcar a alternativa correta que apresentava a sequência de passos certa para resolver um problema, apresentado nas aulas de intervenção.

Na questão 5, com a finalidade de identificar se os alunos sabem aplicar procedimento para resolver um problema, foi proposto que os alunos resolvessem a problemática proposta na questão anterior.

Na questão 6, foi proposto que os alunos descrevessem a importância do estudo da probabilidade em seu cotidiano, à qual buscou-se averiguar as concepções probabilísticas que os alunos adquiram após a abordagem do conteúdo.

Por meio deste conjunto, foi possível analisar se a metodologia proposta foi construtiva para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.

CAPITULO 3

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

3.1 Descrições das atividades antes da pesquisa

O professor da Escola 1 já havia apresentado às turmas do segundo ano os conteúdos de análise combinatória e geometria espacial, ele introduziu as aulas de probabilidade explicando aos alunos que probabilidade é um resultado provável, em seguida transcreve no quadro que provável significa que um determinado fenômeno pode ocorrer ou não. Foi questionado se havia feito um plano de ensino para lecionar probabilidade professor respondeu que não e que o único recurso de ensino era um livro DANTE, L. Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: Ática, 2001.

O professor transcreveu no quadro exemplos de fenômenos prováveis como lançamento de um dado honesto, número de peças defeituosas de uma fábrica, resultado de um jogo de roleta e número de pessoas que ganharão na loteria. Para avaliação, o professor propõe um exercício de três questões que rastreie as concepções do aluno sobre experimentos aleatórios.

Uma das questões propostas pelo professor foi: “Alguns apostadores recebem R$36,00 e outros recebem R$2,00, sendo que a aposta é a mesma (R$1,00). Essas regras são justas?” Uma grande parte dos alunos apresentaram dúvidas em interpretar essa situação problema. Para esclarecer, o professor explica que os jogadores que resolvem pagar um valor baixo tem menos risco de perder, enquanto os que resolvem apostar alto possuem mais risco de perder a aposta, assim as regras são consideradas justas.

3.2 Descrição e Aplicação das Atividades durante a pesquisa

Na escola Nossa Senhora Aparecida, a professora nos cedeu seu espaço sala de aula para a ação pedagógica proposta nesta pesquisa, depois de já ter feito uma abordagem no estudo da análise combinatória.

3.2.1 Descrição das Aulas

Aula 1 (APÊNDICE B)

Data: 25/07/2018

Série: 2 ano 1

Conteúdos Abordados: Experimento Aleatório, espaço amostral, evento e cálculo de probabilidades para eventos equiprováveis.

Passo a passo da aula: iniciei sugerindo que os alunos formassem duplas. Em seguida, foi distribuído para cada aluno das duplas formadas, quatro fichas de cores: amarelo, laranja, azul e rosa. Para que os alunos disputem o jogo senha como descrito no plano de aula 1 Apêndice B.

Figura 1: Alunos disputando o jogo senha

Fonte: Autor (2018)

Após a aplicação do jogo expliquei o conceito de experimento aleatório que consiste no primeiro jogador formar uma sequência de três cores as quais o adversário não tem a mínima ideia de quais cores foram selecionadas pelo primeiro jogador. Em seguida é explicado o conceito de espaço amostral ao analisar as opções de cores que o segundo jogador possui ao adivinhar a sequência do adversário. Logo é apresentado o conceito de evento quando o primeiro jogador escolhe três cores para compor a sequência.

Após apresentar os conceitos básicos perguntei aos alunos se seria possível descobrir estimar uma possibilidade do segundo jogador acertar a sequência na primeira tentativa? Mostrei que para calcular a possibilidade de um evento ocorrer usamos a divisão da quantidade de casos favoráveis ao evento pela quantidade de casos possíveis, ou seja o espaço amostral. Expliquei que ao analisar as opções que o segundo jogador possui, ele pode formar várias sequencias de três cores, onde a ordem já influencia em outra sequência, buscando apresentar o conceito de arranjo para o calcular todas as sequência de quatro elementos tomados três arranjos, mostrei todas as possibilidades através de uma cartolina. Sendo apenas uma chance para acertar a sequência resultando em $\frac{1}{24}$.

Aula 2 (APÊNDICE C)

Data: 27/07/2018

Série: 2 ano 1

Conteúdos Abordados: Cálculo de probabilidades.

Situações Problemas trabalhadas nesta aula:

Situação 1: Qual a probabilidade de, aleatoriamente, escolhermos um número par dentre os elementos do conjunto {1,2, 3, 4, ... , 21,22,23}?

$$P(número\ par) = \frac{(quantidade\ de\ números\ pares)}{(quantidade\ total\ de\ números)} = \frac{11}{23} = 0{,}4782 \times 100 = 47{,}82\%$$

Situação 2: Marcos e Paulo fazem parte de um grupo de 10 pessoas que serão disposta aleatoriamente em fila. Qual a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Marcos e Paulo?

$$P(existir\ 4\ pessoas\ entre\ M\ e\ P) = \frac{2 \times 5 \times 8!}{10!} = \frac{5 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{9} = 0{,}1111 \times 100 = 11{,}11\%$$

Passo a passo da aula: Iniciei a aula transcrevendo no quadro algumas situações problemas que envolvam a probabilidade conforme plano de aula 2 (Apêndice C). A primeira situação problema consiste em retirar aleatoriamente do conjunto $\{1,2,\ldots,22,23\}$, um número par. Por meio do método:

No primeiro passo: Compreender o problema, questionei a turma: O que o problema pede para ser resolvido? Não obtive resposta, sugeri que os alunos lesem junto comigo, em seguida perguntei novamente: O que o problema quer que seja solucionado? A probabilidade de sair par, responderam, por meio desta resposta, registrei no quadro: Probabilidade de sair par.

No segundo passo: Planejar uma estratégia, e como calculamos a probabilidade conforme estudamos na sala de aula passada? Um aluno disse: Número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis. Registrei no quadro: $P(evento\ qualquer\ acontecer) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$.

No terceiro passo: Executar a estratégia planejada, partindo da ideia do nosso colega, como seria feito para encontrar o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis? Alguns alunos responderam que era 1 dividido por 24, outros 0,132 , indaguei por que seriam esses valores, os alunos riam, propus que retornássemos ao segundo passo, expliquei aos alunos que precisamos substituir nossas variáveis no que queremos solucionar do problema, observem que queremos descobrir a probabilidade de sair par, quem vai ser a quantidade de casos favoráveis? O total de pares, alguns responderam e o de casos possíveis? O total de 1 até 23. Então como fica na equação? Registrei no quadro: $P(sair\ par) = \frac{quantidade\ de\ numeros\ pares}{total\ de\ números\ de\ 1\ até\ 23}$, e como encontramos essa probabilidade? Nenhum aluno se manifestou, sugeri que os alunos junto comigo analisassem o seguinte esquema feito no quadro: ao abrirmos o conjunto temos: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}$, perguntei à turma: Quantos números pares e ímpares temos nesse conjunto? 11 pares e 12 ímpares, e agora já temos respostas o suficiente para resolvermos o problema? Um aluno disse que a resposta final é 12 divido por 23 que dá 0,4782 e mais números, propus que esse mesmo aluno viesse ao quadro para mostrar a estratégia que ele utilizou, mas o mesmo se recusou, por meio da resposta que o aluno manifestou expliquei aos demais que o valor 12 é quantidade de números pares que podem sair no conjunto como verificamos ao contarmos 2,4, 6 e assim por diante, divido pela quantidade total de números de 1 à 23, ao efetuarmos a divisão sugeri que os alunos fizessem esse cálculo na calculadora do celular, onde os demais comprovaram que resultava no valor de 0,4782, propus que os alunos multiplicassem esse valor por 100, os alunos responderam que o valor era de 47,82 ao consideramos duas casas decimais.

No quarto passo: Interpretar os resultados obtidos, indaguei os alunos e o que significa esse valor? Uma aluna respondeu que esse valor era a quantidade de chance que tínhamos para que um número par seja retirado desse conjunto, então ao interpretarmos os resultados que obtivemos, devemos voltar no primeiro passo, perguntei novamente à turma: Vocês lembram o que o problema queria que a gente solucionasse? A probabilidade de sair par, responderam, logo escrevemos que a probabilidade de um número par ser sorteado é de 47,82% de chance.

Em seguida transcrevi a próxima questão que consiste em encontrar a probabilidade de em uma fila de 10 pessoas qual a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Marcos e Paulo. Porém nesse dia o tempo de aula era de trinta minutos e com isso sugeri que os alunos tentassem resolver em casa. Na aula posterior perguntei como resolveram a questão, nenhum aluno se manifestou, então perguntei o que não ficou compreendido no problema proposto, alguns alunos manifestaram respostas sem ter feito algum raciocínio matemático, questionei como foi encontrado esse valor. Procurei resolver a questão junto com os alunos convidando os manifestarem estratégias para solucionar a situação proposta.

No primeiro passo: Ao compreender o problema, perguntei o que pedia o problema? Disseram que era saber a probabilidade de ter 4 pessoas entre Marcos e Paulo.

No segundo passo: Planejar uma estratégia, interroguei a turma: E qual seria o melhor caminho para solucionarmos essa situação? Nenhum aluno se manifestou. Voltei a ler o problema junto com os alunos, perguntei o que o problema estava propondo que fosse solucionado? Probabilidade de ter entre os dois quatro pessoas, responderam, indaguei vocês lembram como calculamos a probabilidade de algo ocorrer no exercício anterior? Um aluno respondeu o número de casos favoráveis divido pelos possíveis, registrei no quadro: $P(ter\ 4\ pessoas\ entre\ Marcos\ e\ Paulo) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$.

No terceiro passo: Indaguei a turma: E como vocês vão encontrar a quantidade de casos favoráveis e os casos possíveis? 2 divido por 10 respondeu um aluno, convidei o mesmo para que mostrasse no quadro o que foi que ele efetuou para manifestar tal resultado, porém riu e se recusou. Expliquei que o evento favorável é que existam quatro pessoas quaisquer entre Marcos e Paulo ou Paulo e Marcos a ordem aqui é importante, mostrei desenhando no quadro 10 traços que correspondem as 10 pessoas na fila e marquei com a letra M (Marcos) e P (Paulo) as respectivas posições quaisquer que os sujeitos do problema poderiam ocupar, primeiramente desenhei um esquema que mostra M ocupando a primeira posição da fila e P ocupando a sexta, contabilizando 5 maneiras até que M esteja na quinta posição e P na décima e que o mesmo ocorre quando para P ocupar a primeira e M ocupar a sexta, também contabilizando 5 maneiras e em cada alternativa vamos ter 8! pessoas tirando M e P. o que totaliza que o número de casos favoráveis em ter 4 pessoas entre Marcos e Paulo é de $2 \cdot 5 \cdot 8!$. Enquanto o número de casos possíveis será as dez pessoas incluindo Marcos e Paulo ocupando diferentes posições nessa fila de dez componentes. Ou seja: $P(4\ pessoas\ entre\ Marcos\ e\ Paulo) = \frac{2 \times 5 \times 8!}{10!}$ onde podemos fazer simplificações resultando em $\frac{1}{9} = 0{,}1111 \times 100 = 11{,}11\%$

No quarto passo: Interpretando os resultados obtidos, perguntei a turma o que foi que determinamos no primeiro passo? Encontrar a probabilidade de ter quatro pessoas entre Marcos e Paulo, responderam, logo registrei no quadro: Então a probabilidade de haver quatro pessoas entre Marcos e Paulo é de 11,11% de chance.

Após foi sugerindo um exercício de fixação proposto no Apêndice C, em seguida foi realizada a chamada.

Figura 2: Explicação do método da resolução de problemas

Fonte: Autor (2018)

Aula 3 (APÊNDICE D)

Data: 30/07/2018

Série: 2 ano 1

Conteúdos Abordados: Cálculo de probabilidades para eventos equiprováveis.

Situação Problema trabalhada nesta aula:

(Livro: contato matemática 2016) A ararinha azul (Cyanopsitta spixii) habitava o nordeste brasileiro e foi extinta da natureza em 2000. Atualmente existem poucos exemplares, em cativeiros espalhados por várias partes do mundo. A destruição de seu habitat natural e o tráfico de animais foram os principais responsáveis pela extinção dessa ave.

Fonte: Disponível em: https://ciclovivo.com.br/planeta/meio-ambiente/ararinha-azul-considerada-extinta-e-vista-na-natureza-apos-14-anos/. Acesso em 24 de jul. 2018

Suponho que em um cativeiro existem 5 exemplares de ararinhas azuis fêmeas e 8 machos, qual a probabilidade de se retirar ao acaso desse cativeiro:

Qual a probabilidade de se retirar ao acaso ou seja aleatoriamente desse cativeiro e elas serem do mesmo sexo?

$$P(pares\ do\ mesmo\ sexo) = \frac{(número\ de\ pares\ do\ mesmo\ sexo)}{(número\ total\ de\ pares)} = \frac{38}{78} = 48{,}72\%$$

E qual a probabilidade de se retirar ao acaso, ou seja aleatoriamente do mesmo cativeiro duas ararinhas e elas formarem um casal?

$$P(casais) = \frac{(número\ de\ casais)}{(número\ total\ de\ pares)} = \frac{40}{78} = 51{,}28\%$$

Passo a passo da aula: Iniciei a aula pedi que os alunos se aglomerem em duplas e em seguida distribui a questão numa folha de papel A4, estipulei um tempo para que os alunos com base nas aulas anteriores tentei solucionar o problema. Em seguida perguntei aos alunos o que o problema pede? Poucos alunos responderam a probabilidade de se retirar duas ararinhas do mesmo sexo e um casal.

Primeiro, resolvi o primeiro problema de encontrar a probabilidade de duas ararinhas do mesmo sexo, por meio do método da resolução de problemas. No terceiro passo da resolução de problemas que consiste em executar a estratégia planejada, para encontrar o número de casos possíveis foi preciso analisar todos os possíveis resultados de combinamos todas as 8 fêmeas com os 5 machos em grupos de dois, onde foi usado o conceito de combinação e por meio das ararinhas confeccionadas de papelão foi possível exibir um diagrama de árvore como encontrar os 78 pares de ararinhas.

Figura 3: Professora manipulando material concreto

Fonte: Autor (2018)

De forma análoga para o número de casos favoráveis onde foi usado o conceito de combinação de agrupar as só as fêmeas em grupos de dois e somar com a quantidade de combinações dos só machos em pares. Ressaltei que a quantidade de combinações é essencial para calcularmos pelo conceito de combinação do que tentar fazer o diagrama de arvore: $C_{8,1} = \frac{8!}{(8-1)! \times 1!} = 8$ fêmeas enquanto os machos: $C_{5,1} = \frac{5!}{(5-1)! \times 1!} = 5$.

Após a conclusão da primeira questão, estipulei um tempo de dez minutos e para que encontrassem a probabilidade de se retirar um macho e uma fêmea desse cativeiro. Análogo ao primeiro problema, apenas no número de casos favoráveis foi resolvido pelo conceito de combinação ao combinarmos a quantidade de machos em grupos de um elemento e somados com a combinação de fêmeas em grupos de um, também por meio das ararinhas de papelão a professora mostrou aos alunos o diagrama de árvore ilustrando o princípio fundamental da contagem as combinações de casais.

Figura 4: Resolução da questão 2

Fonte: Autor (2018)

Aula 4 (APÊNDICE E)

Data: 25/07/2018

Série: 2 ano 1

Conteúdos Abordados: Cálculo de probabilidades para eventos equiprováveis.

Situação Problema trabalhada nesta aula:

(Enem 2014 – 158 – prova Brasil) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizaram-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer neste teste:

A. Paciente tem doença e o resultado do teste é positivo.
B. Paciente tem a doença e o resultado do teste é negativo.
C. Paciente não tem a doença e o resultado do teste é positivo.
D. Paciente não tem a doença e o resultado do teste é negativo.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser positivo se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

FONTE: BENSEÑOR, 2011 (Adaptado)

Conforme o quadro teste proposto, a sensibilidade dele é de:

a) 47,5%
b) 85,0%
c) 86,3%
d) 94,4%
e) 95,0%

Passo a passo da aula: Iniciei a aula pedindo que os alunos formassem duplas, em seguida distribui uma folha de papel A4 contendo uma questão do Enem conforme proposto no Apêndice F, que consiste em analisar a veracidade de um teste diagnóstico ao encontrar a probabilidade do teste resultar em positivo e o paciente estiver com a doença. Estipulei um tempo para que os alunos com conhecimentos adquiridos em aulas anteriores tentassem resolver.

Após o tempo estipulado perguntei aos alunos o que o problema sugeria que descobríssemos, já iniciando a metodologia da resolução de problemas, no primeiro passo: compreender o problema, alguns alunos responderam a sensibilidade do teste, questionei o que era isso para verificar se eles tinham lido a questão, porém os alunos se sentiram inseguros em responder, expliquei que a sensibilidade é a mesma situação que encontrarmos a probabilidade de pessoas com a doença e o teste dar positivo de acordo com o que o problema nos informa.

No segundo passo: executar a estratégia planejada, expliquei novamente que a probabilidade de um evento ocorrer se calcula por: $P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ de\ A}{número\ de\ casos\ possíveis}$.

No terceiro passo: Executar a estratégia planejada, perguntei aos alunos quem seria o evento A para substituirmos na equação, nenhum aluno se atreveu a responder, voltei de novo a questionar o que o problema quer? A sensibilidade responderam, e indaguei e o que a questão nos diz sobre a sensibilidade? A probabilidade de der positivo e o paciente ter a doença disseram, então na equação temos:$P(der\ positivo\ e\ o\ paciente\ ter\ a\ doença) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$, perguntei e quem é o número de casos favoráveis nessa situação? Alguns respondem que seria quantidade total de pessoas que fizeram o teste, por que? Questionei a turma, sem resposta expliquei que porém a tabela dada no problema nos informa todos os pacientes que compareceram e os que faltaram. expliquei aos alunos que o número de casos favoráveis será a quantidade de pacientes que compareceram e o teste apontou positivo, dividido pelo número total de pacientes em que o teste apontou resultados tanto positivo e quanto negativo. Uma aluna se propôs a responder a questão no quadro, resolveu corretamente porém não soube explicar a estratégia que utilizou.

Por meio da resposta da aluna expliquei que o número de casos favoráveis são as 95 pessoas que estavam presentes e o teste apontou resultado positivo e isto é exatamente o evento que a questão nos propõem a encontrar a probabilidade, enquanto o número de casos possíveis são 100 pessoas pois não faz sentido analisar um teste em que os pacientes não compareceram. Perguntei se alguém tinha não compreendido ou havia pensado em uma outra maneira para resolver o problema, ninguém respondeu.

Figura 5:Aluna respondendo a questão

Fonte: Autor (2018)

No quarto passo: Interpretar os resultados obtidos, questionei a turma o que foi que encontramos com esse valor? Os alunos ficaram calados, perguntei o que foi que o problema queria que fosse solucionado? A probabilidade de der positivo e a pessoa tiver a doença, responderam. Portanto a probabilidade de uma pessoa fazer o teste e estiver com a doença é de 95% de chance.

3.2.2 Aplicação e analise do questionário avaliativo aos alunos

O questionário avaliativo foi aplicado no segundo tempo de aula, distribuído individualmente para cada aluno, durante os primeiros vinte minutos, os alunos se mantiveram concentrados, alguns riam, porém após serem chamados atenção se mantiveram calados, outros perguntaram sobre algumas questões não compreendidas da avaliação e enquanto outros manifestavam expressões faciais entre si no intuito de obter respostas para a avaliação.

Na primeira questão:

1. Leia a seguinte tirinha:

Fonte: https://www.humorcomciencia.com/blog/112-matematica/. Acesso em 23 Jul 2018 (adaptado).

Seria possível identificar qual dos dois seria o ganhador desse jogo? Explique.

Nesta situação o aluno deveria descrever que o jogo proposto pela ave se trata de um experimento determinístico, uma vez que não há nenhuma opção que favoreça o macaco de ganhar. É sugerido que o aluno verifique se o experimento é de natureza aleatória ou determinístico contido no jogo ímpar ou par da tirinha e explique. 4,34% deixaram de responder, 17,40% da turma erraram a questão ao identificar o experimento de natureza aleatória, enquanto 78,26% acertaram ao identificar como um experimento determinístico.

Na segunda questão:

2. O peixe boi da Amazônia é um mamífero aquático conhecido como *Trichechus inunguis*, se alimenta apenas de algas, chega a pesar cerca de 300kg e a medir 2,5m.

Fonte: Disponível em: http://g1.globo.com/am/amazonas/noticia/2014/09/matanca-de-peixe-boi-no-am-tambem-e-culpa-do-consumidor-diz-veterinario.html. Acesso em 23 Jul 2018 (adaptado).

Supondo que no cativeiro do Instituto de Pesquisas da Amazônia (INPA) existam 3 machos e 4 fêmeas. Qual a probabilidade de se retirar aleatoriamente duas fêmeas desse cativeiro?

É proposto aos alunos que identifique a probabilidade de retirar aleatoriamente desse cativeiro duas peixes boi fêmeas por meio de combinação o número de casos possíveis e de casos favoráveis. Observamos que foi apresentado em aula caso similar, ao encontrar a probabilidade de retirar duas ararinhas azuis e elas serem do mesmo sexo. O aluno deveria utilizar o método da resolução da seguinte maneira:

No primeiro passo: Compreender o que deve ser solucionado, que consiste em encontrar a probabilidade de retirar aleatoriamente duas fêmeas de um cativeiro que contém três machos e quatro fêmeas.

No segundo passo: Planejar uma estratégia, para encontrar a probabilidade de retirar duas fêmeas do cativeiro é preciso que se encontre a razão entre o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, ou seja:

$$P(Retirar\ duas\ peixe\ boi\ fêmeas) = \frac{número\ de\ pares\ de\ fêmeas}{número\ total\ de\ pares}$$

No terceiro passo: Executar a estratégia planejada, para encontrar o número de pares de fêmeas, podemos utilizar o conceito de combinação ao agrupar as quatro fêmeas em grupos de dois ou seja:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6\ pares\ de\ fêmeas$$

O número total de pares do cativeiro também pode ser encontrado por combinação ao somarmos a quantidade de fêmeas com os machos em 7 elementos e agruparmos em grupos de dois.

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = 21\ pares$$

Assim a probabilidade de se retirar duas fêmeas:

$$P(Retirar\ duas\ peixe\ boi\ ) = \frac{6}{21} = 0{,}2857 \cdot 100\% = 28{,}27\%$$

No quarto passo: Interpretar os resultados obtidos, a probabilidade de se retirar duas fêmeas de peixe boi do cativeiro é de aproximadamente 28,57% de chance.

Analisando os dados obtidos observou-se que 73,91% dos alunos não resolveram a questão, sinalizando a falta interesse do aluno em raciocinar o problema proposto. Os 26,09% restantes apresentaram cálculos incorretos e respostas sem terem executado cálculos para comprovar a resolução.

Na terceira questão:

ENEM-2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Questão sobre Probabilidade no Enem de 2011

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%
b) 9%
c) 11%
d) 12%
e) 22%

Questão similar foi trabalhada em sala de aula ao calcular a probabilidade do teste diagnóstico de uma doença der positivo e a pessoa estiver com a doença, devendo o aluno realizar os procedimentos abaixo:

Primeiro passo: Compreender a pergunta, que consiste em encontrar a probabilidade de uma pessoa atendida neste posto de vacinação ser portadora de alguma doença crônica.

Segundo passo: Planejar uma estratégia, a probabilidade de encontrar uma pessoa ser portadora de doença crônica será:

$$P(indivíduo\ ter\ a\ doença) = \frac{número\ de\ pessoas\ portadoras\ da\ doença}{número\ de\ pessoas\ vacinadas}$$

Terceiro passo: Executar a estratégia planejada, o número de pessoas portadoras da doença já é contabilizado na tabela com 22 indivíduos. O número de pessoas vacinadas será a soma de todos os indivíduos vacinados no período de 8 de março à 21 de abril conforme a tabela, onde 42 são trabalhadores da saúde e indígenas, 22 são portadores de doenças crônicas, 56 são adultos saudáveis na idade de 20 e 29 anos, 30 são pessoas com mais de 60 anos e 50 são adultos saudáveis com idades de 30 a 39 anos, totalizando 200 indivíduos vacinados, ou seja:

$$P(indivíduo\ ter\ a\ doença) = \frac{22}{200} = 0{,}11 \cdot 100\% = 11\%$$

Quarto passo: Interpretar os resultados obtidos, a probabilidade de selecionar aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação e a mesma ser portadora de uma doença crônica é de 11%.

Apurando os resultados temos: 4,34% não resolveram a questão, 43,47% marcaram a alternativa correta, porém não apresentaram o raciocínio matemático para validar a resposta sugerida, novamente a ausência de cálculos aponta o desinteresse dos alunos em resolver a questão. 52,17% marcam a alternativa incorreta sem manifestarem estratégias para resolver a questão.

Na quarta questão:

4. Considere o seguinte problema:

Qual a probabilidade de aleatoriamente, escolhermos um número ímpar dentre os elementos do seguinte conjunto $\{10,11,12,\ldots,30\}$?

Quais são as fases para resolver este problema?

(   ) Investigar o problema, Analisar as alternativas, calcular e interpretar os resultados

(   ) Calcular o que pede o problema, verificar o que se pede, solucionar com uma estratégia e argumentar o porquê da estratégia.

(   ) Compreender o problema, planejar uma estratégia, executar a estratégia e analisar os resultados obtidos

(   ) Interpretar os resultados, calcular as supostas alternativas, executar a estratégia e verificar se a estratégia está correta.

Nesta questão o aluno verifica qual das alternativas propostas contém a sequência correta da resolução de problemas que consiste em compreender, planejar, executar e interpretar 4,35% não responderam a questão. 4,34% erraram a questão e 91,31% acertaram, observa-se que os alunos compreenderam o método.

Na quinta questão:

5. Resolva: Qual a probabilidade de aleatoriamente, escolhermos um número ímpar dentre os elementos do seguinte conjunto$\{10,11,12,\ldots,30\}$?

Questão semelhante foi resolvida em sala de aula ao encontramos a probabilidade de escolher um número par em um conjunto de números naturais de 1 à 23. Onde foi ressaltado aos alunos que o conjunto de números no intervalo contém apenas números naturais. Pelo método da Resolução de Problemas o aluno deveria proceder da seguinte maneira:

Primeiro Passo: Compreender o que pede o problema que consiste em encontrar a probabilidade de escolher um número ímpar entre um intervalo de números de 10 à 30.

Segundo Passo: Planejar uma estratégia, a probabilidade de escolher um número ímpar é a razão da quantidade de números naturais ímpares pela quantidade de números naturais de 10 à 30.

$$P(\acute{I}mpar) = \frac{Quantidade\ de\ n\acute{u}meros\ naturais\ \acute{i}mpares}{Quantidade\ de\ n\acute{u}meros\ naturais\ de\ 10\ \text{à}\ 30}$$

Terceiro Passo: Executar a estratégia planejada, no conjunto $\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30\}$ temos que a quantidade de números naturais ímpares é 10 e a quantidade de números naturais de 10 à 30 é de 21 números, logo a probabilidade é:

$$P(\acute{I}mpar) = \frac{10}{21} = 0{,}4761 \cdot 100\% = 47{,}61\%$$

Quarto Passo: Interpretar os Resultados Obtidos, A probabilidade de escolhermos um número ímpar do conjunto de números naturais de 10 à 30 é de 47,61% de chance.

Conferindo os resultados obtidos: 78,26% não resolveram a questão, 17,40% erraram e 4,34% acertaram. Verifica-se que ao alunos conhecem o método, porém não conseguem executar.

Na sexta questão:

6. Descreva com suas palavras a importância da probabilidade em seu cotidiano.

Nesta questão propõem que o aluno descreva a relevância da probabilidade em seu dia a dia. Apurando os resultados obtidos: 13,05% não responderam a questão, 69,56% acertaram descreveram a probabilidade como medida de incerteza útil em situações do dia a dia. 17,39% erraram ao descrever a probabilidade como um processo de contagem.

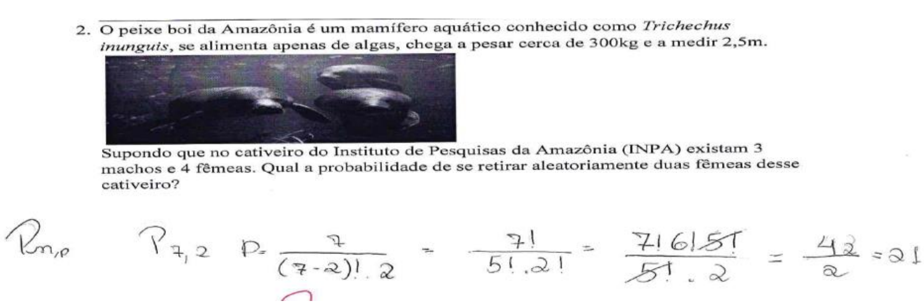
Com o objetivo de tornar a análise dos resultados mais consistente selecionamos aleatoriamente questões respondidas pelos alunos que consiga apontar a relevância da metodologia proposta.

3.2.3 Análise dos resultados da avaliação para verificar a contribuição da metodologia aplicada.

Um dos objetivos propostos nesta pesquisa consiste em verificar se a resolução de problemas auxilia na aprendizagem da probabilidade em turmas do segundo ano do ensino médio.

Na segunda questão:

Figura 6: Resposta da avaliação questão 2



2. O peixe boi da Amazônia é um mamífero aquático conhecido como *Trichechus inunguis*, se alimenta apenas de algas, chega a pesar cerca de 300kg e a medir 2,5m.

Supondo que no cativeiro do Instituto de Pesquisas da Amazônia (INPA) existam 3 machos e 4 fêmeas. Qual a probabilidade de se retirar aleatoriamente duas fêmeas desse cativeiro?

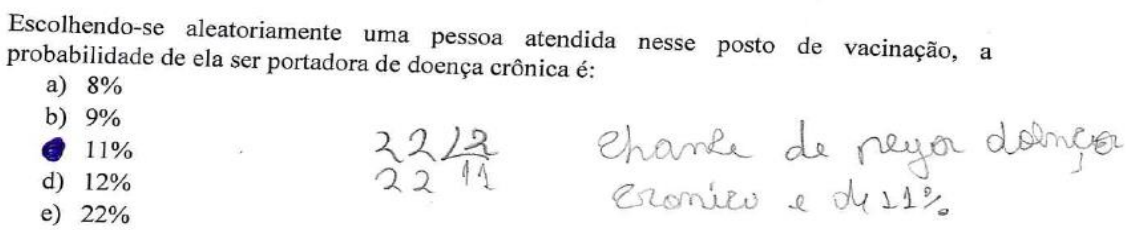
$P_{n,p}$ $\quad P_{7,2}$ $\quad P = \frac{7}{(7-2)!\,.\,2} = \frac{7!}{5!\,.\,2!} = \frac{7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,.\,2} = \frac{42}{2} = 21$

Fonte: Autor (2018)

Nesta questão percebe-se que o aluno não executou o primeiro passo, não efetuou o segundo passo, iniciou uma estratégia fazendo um confuso cálculo de combinação em permutação dos sete peixes boi em grupos de dois, que consiste no número de casos possíveis, mas não conseguiu apresentar os números de casos favoráveis e no quarto passo não foi efetuado.

Na terceira questão:

Figura 7: Resposta da Avaliação questão 3


Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%
b) 9%
c) 11%
d) 12%
e) 22%

22/2
22 11

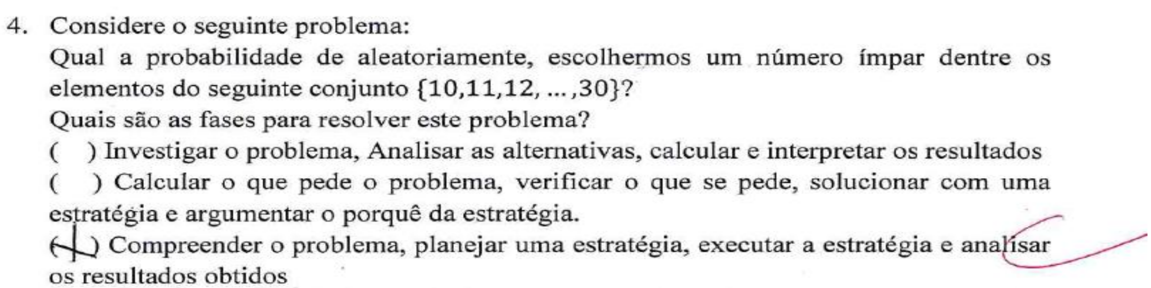
Chance de pegar doença
crônico é de 11%

Fonte: Autor (2018)

Nesta questão o aluno não executou nenhum dos passos que compõem a resolução de problemas, percebe-se que há uma contradição no cálculo proposto por este aluno, uma vez que não há motivo para que o mesmo execute tal operação a qual coincidentemente levou a opção correta.

Na quarta questão:

Figura 8: Resposta da Avaliação questão 4

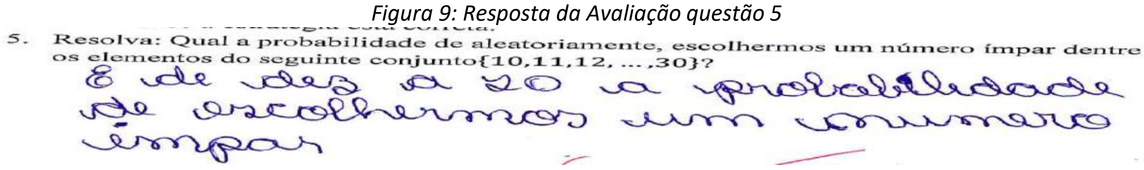

4. Considere o seguinte problema:
Qual a probabilidade de aleatoriamente, escolhermos um número ímpar dentre os elementos do seguinte conjunto {10,11,12, ... ,30}?
Quais são as fases para resolver este problema?
( ) Investigar o problema, Analisar as alternativas, calcular e interpretar os resultados
( ) Calcular o que pede o problema, verificar o que se pede, solucionar com uma estratégia e argumentar o porquê da estratégia.
(X) Compreender o problema, planejar uma estratégia, executar a estratégia e analisar os resultados obtidos
( ) Interpretar os resultados, calcular as supostas alternativas, executar a estratégia e verificar se a estratégia está correta.

Fonte: Autor (2018)

Nesta questão percebe-se que o aluno reconhece os passos da resolução de problemas apresentados em sala de aula.

Na quinta questão:

Figura 9: Resposta da Avaliação questão 5


5. Resolva: Qual a probabilidade de aleatoriamente, escolhermos um número ímpar dentre os elementos do seguinte conjunto{10,11,12, ...,30}?

é de dez a 20 a probabilidade de escolhermos um numero impar

Fonte: Autor (2018)

Nesta questão observa-se que o aluno não executou nenhum dos passos da resolução de problemas, interpretando de forma incorreta o resultado obtido.

Ao apurar que os alunos sabem os passos que compõem o método, porém não conseguiram desempenhar nas situações propostas. De certa forma já esperado, devido a mudança do público alvo em estudo.

Durante as aulas, os problemas foram apresentados em ordem crescente de dificuldades, fato que desmotivou a turma a resolver os exercícios propostos, para incentiva-los o conteúdo era reapresentado por meio do material concreto, os alunos eram convidados a expor suas ideias, a interagir com diferentes suposições como a própria metodologia propõem que o aluno é o próprio construtor do seu conhecimento e o professor mediador desse processo, entretanto, muitos não manifestavam entusiasmo algum nas resoluções dos problemas trabalhados em sala de aula.

Quando os alunos apresentavam os cálculos, eram questionados sobre os valores numéricos apresentados nas resoluções não manifestavam nenhum posicionamento do que significava determinado valor. Desta forma, a metodologia não foi capaz de fazer o estudante raciocinar diferente estratégias para resolver uma problemática. Cabe ressaltar que antes das aulas de probabilidade, a professora titular que havia abordado análise combinatória, raramente apresentava situações problemas que levassem os alunos a refletir e a construir diferentes processos de resolução.

> Acreditamos que não faz sentido trabalharmos atividades envolvendo conceitos estatísticos e probabilísticos que não estejam vinculados a uma problemática. Propor coleta de dados desvinculada de uma situação problema não levará uma análise real. Construir gráficos e tabelas, desvinculados de um contexto ou relacionados a situações muito distantes do aluno pode estimular a elaboração de um pensamento, mas não garante o desenvolvimento de sua criticidade. (LOPES, 2008, p. 62).

A problemática do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) trabalhada em sala de aula, por mais que os alunos não relatassem ideias, foi fundamental para que eles conseguissem visualizar uma situação aleatória relevante que fizesse o estudante compreender a probabilidade em situações reais.

O auxílio do material concreto foi importante na construção dos conceitos prévios, devido turma em estudo tendo feito uma abordagem dos processos de contagem antes da aplicação da metodologia, quanto a probabilidade os resultados obtidos na avaliação não produziu argumentos consistentes que comprovasse o aprendizado dos alunos em investigação.

A resolução de problemas como metodologia de ensino não foi capaz de proporcionar uma melhoria satisfatória ao ensino da probabilidade, conforme os dados apresentados não foi possível analisar o processo de resolução dos problemas propostos, uma vez que a maioria da turma deixou as questões em branco, a qual não nos permitisse examinar o comportamento dos alunos ao se defrontarem com situações problemas em que o conhecimento probabilístico era necessário.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, evidencia a dificuldade enfrentada pelos alunos em relação a metodologia, método de resolução de problemas, e ao conteúdo, probabilidade.

Visando o ensino e aprendizagem, foram propostas atividades com materiais concretos. Durante as aulas, os alunos fizeram análise do experimento aleatório sugerido nos problemas apresentados, com isso, tinha-se em mente a valorização da ideia que o aluno desenvolveria, permitindo interação democrática de pensamentos lógicos entre alunos e professores, dessa forma, tentou-se fazer com que o aluno ficasse no centro do conhecimento, ele seria o construtor do seu saber. Porém, tais tentativas de aprofundamento do raciocínio lógico, perdeu-se com a pouca participação por parte dos alunos, sendo as tentativas feitas inócuas a eles no que tange a agregar uma aprendizagem frutífera, sendo que a maioria não apresentou uma simples manifestação sequer de interesse em relação ao conteúdo.

No que diz respeito ao conteúdo observou-se que os alunos, mesmo antes das aulas reconheciam a existência de probabilidade em seu cotidiano, mas mesmo partindo desse conhecimento prévio a dificuldade de compreensão dos problemas propostas impediram a solução, de tal forma que, os alunos em estudo pouco eram poucos instigados a resolver situações contextualizadas em aulas anteriores a probabilidade. Mesmo quando apresentavam cálculos e resultados não sabiam o significado do valor obtido.

Desta forma observa-se que a resolução de problemas como metodologia de ensino não foi possível concluir se sua abordagem para o ensino de probabilidade em sala de aula se foi significativa, uma vez que, os resultados obtidos não foram satisfatórios. Este fato é observado na análise das respostas e até mesmo pela ausência de respostas revelando que o aprendizado obtido foi mínimo, os alunos não foram capazes de propor soluções para as situações que envolviam probabilidade.

É preciso que ainda se persista trabalhos que abordem a educação estocástica desde a escola básica ao nível superior, propondo diferentes abordagem que auxilie o professor em sua ação docente de tal forma a desenvolver um cidadão capaz de raciocinar criticamente a sociedade em que atua.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Orientações Educacionais Complementares, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2002 p.126

BUSETTO, Daniele. **Propostas ao Estudo de Probabilidade no Ensino Médio**. Erechim, RS: Uricer, 2010. p. 12. Disponível em: http://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1260.pdf. Acesso em 10 de agosto 2018.

CRESWELL, Jothn. **Projeto de Pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução: Magda Lopes. Porto Alegre, RS: Artmed, 2010. p. 37.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática - da Teoria à Prática**. Campinas, SP: Paupurus, 1996. p.27

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática – Teoria à Prática**. São Paulo, SP: Ática, 2009.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa.** Rio de Janeiro: Paz & Terra, 1997 p. 53. Disponível em: http://forumeja.org.br/files/Autonomia.pdf. Acesso 25 de abril de 2018.

FURASTÉ, Pedro. **Normas Técnicas para o trabalho Científico: Explicitação das Normas da ABNT**. Porto Alegre, RS: Dáctilo Plus, 2012.

LOPES, Celi. **O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a Formação dos Professores**. Campinas, SP: Cedes, 2008. p.60. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0101-32622008000100005&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso em 3 abril 2018.

LOPES, Celi; MEIRELLES, Elaine. **O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística**.Campinas, SP: XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática, 2005. p.2. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf. Acesso em 23 de abril de 2018.

NERES, Raimundo; COSTA, Venâncio. **Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria**. São Paulo, SP: Educação Matemática e Pesquisa, 2018. p. 15. Disponível em:https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/34974/pdf. Acesso em 5 de outubro 2018.

ONUCHIC, Lourdes; MORAIS, Rosilda. **Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática**. São Paulo: Educação Matemática e Pesquisa 2015 p. 673. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16951/pdf. Acesso em 5 de outubro 2018.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, RJ: Interciência. 1995, p. 3

RODRIGUES, Fredy. **Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação à reflexão**, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2012v7n2p187/23460. Acesso em: 5 de Setembro de 2018.

SCHNEIDER, Juliana. **Contribuições do Ensino da Estatística na Formação Cidadã do aluno da educação Básica**. Florianópolis, SC. 2013. Disponível em: http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2014/04/juliana_schneider.pdf .Acesso em 15 abril 2018.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática crítica: A questão da democracia**, Tradução Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo - Campinas, SP: Paupurus, 2015. p.160

STEINMETZ, Rossano. **Uma proposta de Ensino de Probabilidade no Ensino Médio**. Porto Alegre. 2012. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/55136. Acesso em 18 de abril 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A

(Roteiro de observação)

Dados de Identificação	
Nome da Escola: Escola Estadual Nossa Senhora de Aparecida	
Turma: 2ª ano 1	**Turno: Matutino**
Conteúdo da Aula: Probabilidade	
Data da observação:	
Aspectos a serem observados: **Planejamento** (Este item envolve o plano de aula e sua consequente execução). • Existe coerência entre o proposto no plano de aula e o que foi realizado na prática do (a) professor (a)? • Os planos são desenvolvidos de acordo com os Referenciais do Ensino Médio, ou seja, dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, documento referente à Matemática. **A interação dos alunos com o conteúdo** • O conteúdo é adequado às necessidades de aprendizagem da turma? • As atividades e os problemas propostos são desafiadores e proveitosos para todos os alunos ou para alguns foi muito fácil e, para outros, muito difícil? • Há a retomada de conhecimentos trabalhados em aulas anteriores como um ponto de partida para facilitar novas aprendizagens ou as atividades apenas coloca em jogo o que já é conhecido pela turma? • Como está organizado o tempo da aula? Foram reservados períodos de duração suficiente para os alunos fazerem anotações, exporem as dúvidas, debaterem e resolverem problemas? **Os procedimentos Metodológicos** • A mediação desenvolvida pelo (a) professor (a) permite uma aprendizagem significativa? • Os conteúdos são contextualizados com a realidade sociocultural dos alunos? • A prática pedagógica apresenta-se de forma estimulante e desafiadora? • As atividades propostas para a turma são, em sua maioria, de natureza individual ou coletiva?	

Utilização de recursos

- Os recursos são utilizados de forma adequada?
- São recursos são apropriados para o Ensino Médio?
- Os recursos são motivadores e enriquecem o desenvolvimento da aula?

Avaliação da Aprendizagem

- O professor avalia o aluno consecutivamente?
- A avaliação é diagnóstica? Ou seja, o professor utiliza-a para identificar o nível de aprendizagem do aluno em relação ao conteúdo?
- Utiliza a avaliação para identificar os obstáculos didáticos?

APÊNDICE B

(Plano de Aula 1)

PLANO DE AULA

Dados de identificação
Estagiária: Natália Lima de Oliveira
Disciplina: Matemática
Nível de ensino: Ensino Médio
Série: 2ª ano
Data:08/08/2018
Local: Escola Estadual Nossa Senhora de Aparecida

TEMA DA AULA:

Probabilidades

OBJETIVO GERAL: Utilizar a probabilidade para tomada de decisão em situações cotidianas

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- **Compreender conceitos de espaço a amostral e evento.**

MATERIAIS:
Quadro branco e pincel, fichas coloridas confeccionas de papelão.

TEMPO: 50 min

DESENVOLVIMENTO:

A professora inicia a aula pedindo aos alunos que formem duplas e distribui para cada aluno quatro fichas nas cores azul, amarelo, laranja e rosa. E explica que cada aluno deve escolher por ímpar ou par quem iniciará a jogada, que consiste no primeiro jogador criar uma sequência de três cores com as quatro fichas, uma vez criada a sequência o segundo jogador deverá adivinhar a sequência proposta pelo primeiro jogador organizando as fichas em cinco tentativas. O jogador que conseguir acertar a sequência do adversário no menor número de tentativas é o vencedor.
Após a aplicação do jogo a professora discute com os alunos:
Ao adivinhar a sequência do adversário lidamos com a incerteza de qual sequência foi formada, não sabemos o resultado, por esta causa aleatoriamente supomos uma sequência qualquer na primeira tentativa. Um experimento aleatório é definido como experimento ao qual não sabemos determinar o resultado. No caso do jogo o experimento aleatório consiste em que o segundo jogador adivinhe a sequência sugerida pelo primeiro jogador, assim vamos analisar as opções que ele dispõem: São quatro fichas de diferentes cores. Chamamos de espaço amostral conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, o espaço amostral que o segundo jogador são as quatro fichas.

$$\text{Opções do segundo jogador} = \{laranja, amarelo, azul, rosa\}$$

Quando o primeiro jogador determina uma sequência de três cores, ele forma um subconjunto com elementos do espaço amostral do segundo jogador. Chamamos de evento qualquer subconjunto do espaço amostral.
E qual a probabilidade do segundo jogador acertar a sequência na primeira jogada?
Para calcular a probabilidade de um evento acontecer, ou seja a probabilidade de um evento E de um espaço amostral Ω ocorrer, quando além do evento E todas as outras possibilidades de Ω tem a mesma chance de ocorrer, é calculada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{nº\ de\ casos\ favoráveis}{nº\ de\ casos\ possíveis}$$

Assim, para verificarmos a probabilidade do segundo jogador acertar a sequência na primeira tentativa, temos:
A sequência é composta por três cores, no total de quatro cores disponíveis. Desta forma:
Para a primeira posição temos 4 cores disponíveis.
Para a segunda posição temos 3 cores disponíveis pois não tem como haver cores repetidas.
Para a terceira posição temos 2 cores disponíveis.
Pelo princípio da fundamental da contagem:
$4 \times 3 \times 2 = 24$ combinações de cores possíveis.
Também podemos resolver esse mesmo problema pelo conceito de arranjo, estamos interessados em descobrir as diferentes posições das cores azul, laranja, amarelo e rosa, assim:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = {}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Onde n é o número de elementos e $r$os agrupamentos que queremos agrupar. A professora mostra essas possibilidades por meio de uma cartolina para os alunos visualizarem. Assim, como existe apenas uma chance para acertar a sequência, a probabilidade do segundo jogador acertar a sequência na primeira tentativa:

$$P(Acertar\ na\ primeira\ tentativa) = \frac{1}{24} = 0{,}0416 = 4{,}2\%$$

REFERÊNCIAS

Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2002.

Material teórico – Módulo Introdução à Probabilidade. Disponível em: <https://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cwxho8oykn408.pdf>. Acesso em: 7 de maio 2018

SOUZA, J.; RIBEIRO, J. #Contato matemática, 2ºano. São Paulo: FDT, 2016. - (Coleção Contato matemática)

FERREIRA, Jean Igor - A utilização do jogo “a senha” para trabalhar permutação simples em turmas de ensino médio. Disponível em: < http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/A-UTILIZA%C3%87%C3%83O-DO-JOGO-%E2%80%9CA-SENHA%E2%80%9D-PARA-TRABALHAR-A-PERMUTA%C3%87%C3%83O-SIMPLES-EM-TURMAS-DE-ENSINO-M%C3%89DIO.pdf>. Acesso em 10 de julho de 2018.

APÊNDICE C

(Plano de Aula 2)

PLANO DE AULA

Dados de identificação
Estagiária: Natália Lima de Oliveira
Disciplina: Matemática
Nível de ensino: Ensino Médio
Série: 2ª ano
Data:08/08/2018
Local: Escola Estadual Nossa Senhora de Aparecida

TEMA DA AULA:

Probabilidades

OBJETIVO GERAL: Utilizar a probabilidade para tomada de decisão em situações cotidianas

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- **Solucionar problemas que envolvam probabilidades.**

MATERIAIS:
Quadro branco e pincel

TEMPO: 50 min

DESENVOLVIMENTO: A aula inicia com a professora transcrevendo no quadro alguns exercícios introdutórios sobre a probabilidade:
Exercício 1. Qual a probabilidade de, aleatoriamente, escolhermos um número par dentre os elementos do conjunto {1,2, 3, 4, ... , 21,22,23}?
A professora reserva um tempo para que os alunos tentem ou apresentem alguma sugestão para resolver o problema.
1 ª passo: Compreender o problema.
O problema consiste em calcularmos a probabilidade escolhermos um número par dentre o conjunto proposto:

$$P(número\ par) = \frac{(número\ de\ casos\ favoráveis)}{(número\ de\ casos\ possíveis)}$$

2 ª passo: Planejar uma estratégia.
O número de casos possíveis serão a quantidade total de elementos do conjunto proposto. Já o número de casos favoráveis será a quantidade de números pares contido no conjunto, assim a probabilidade será:

$$P(número\ par) = \frac{(quantidade\ de\ números\ pares)}{(quantidade\ total\ de\ números)}$$

3 ª passo: Executar a estratégia planejada
O número de casos possíveis serão os 23 elementos do conjunto proposto. Já o número de casos favoráveis será a contagem de números pares contido no conjunto:
$\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$ contabilizamos por 11 elementos. Logo:

$$P(número\ par) = \frac{(quantidade\ de\ números\ pares)}{(quantidade\ total\ de\ números)} = \frac{11}{23} = 0{,}4782 \times 100 = 47{,}82\%$$

4 ª passo: Analisar os resultados obtidos
A chance de se retirar um número par deste conjunto é de 47,82%
Exercício 2. Marcos e Paulo fazem parte de um grupo de 10 pessoas que serão disposta aleatoriamente em fila. Qual a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Marcos e Paulo?
A professora reserva um tempo para que os alunos tentem ou apresentem alguma sugestão para o problemas proposto.
1 ª passo: Compreender o problema.
O problema propõem que identifiquemos a probabilidade de numa fila composta de 10 pessoas que entre Marcos e Paulo tenham 4 pessoas:

$$P(existir\ 4\ pessoas\ entre\ M\ e\ P) = \frac{(número\ de\ casos\ favoráveis)}{(número\ de\ casos\ possíveis)}$$

2 ª passo: Planejar uma estratégia
O número de casos possíveis será conjunto de todas 10 pessoas trocando de lugar nas 10 posições. Pois além de obtermos que entre Marcos e Paulo ter 4 pessoas também devemos considerar a possibilidade de 5, 6 e assim por diante quantidade de pessoas entre os dois, além a de não haver nenhuma. Neste caso consideramos que as 10 pessoas trocam de lugar em 10 posições, podemos encontrar esta quantidade pelo conceito de fatorial.

O número de casos favoráveis será analisarmos que existem cinco pares de locais nos quais haverá exatamente quatro pessoas entre Marcos e Paulo: 1 ª e 6 ª na fila, 2 ª e 7 ª, 3 ª e 8 ª, 4 ª e 9 ª e, por fim, 5 ª e 10 ª. Além disso, temos duas opções para dispor Marcos Paulo nesses grupos. Como as 8 pessoas podem ser trocadas de lugares nas 4 posições entre os dois, assim elas podem ser permutadas.

$$P(existir\ 4\ pessoas\ entre\ M\ e\ P) = \frac{(total\ de\ disposições\ para\ as\ 4\ pessoas)}{(10\ pessoas\ trocando\ de\ lugar\ nas\ 10\ posições)}$$

3 ª passo: Executar a estratégia planejada

Assim o total de disposições em que existam apenas 4 pessoas entre Marcos e Paulo é $5 \times 2 \times 8!$. Assim a probabilidade:

$$P(existir\ 4\ pessoas\ entre\ M\ e\ P) = \frac{5 \times 2 \times 8!}{10!} = \frac{5 \times 2}{10 \times 9} = \frac{1}{9} = 0{,}1111 \times 100 = 11{,}11\%$$

4 ª passo: Analisar os resultados obtidos

A chance de existir 4 pessoas entre Marcos e Paulo é de 11,11%

Em seguida a professora transcreve no quadro o seguinte exercício:

3. Dois dados são jogados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter soma igual a 10 nas faces voltadas para cima?

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{5}$

REFERÊNCIAS

Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2002.

Material teórico – Módulo Introdução à Probabilidade. Disponível em: <https://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cwxho8oykn408.pdf>. Acesso em: 7 de maio 2018

SOUZA, J.; RIBEIRO, J. #Contato matemática, 2ºano. São Paulo: FDT, 2016.-(Coleção Contato matemática)

APÊNDICE D

(Plano de Aula 3)

PLANO DE AULA

Dados de identificação
Estagiária: Natália Lima de Oliveira
Disciplina: Matemática
Nível de ensino: Ensino Médio
Série: 2ª ano
Data:08/08/2018
Local: Escola Estadual Nossa Senhora de Aparecida

TEMA DA AULA:

Cálculo de Probabilidades

OBJETIVO GERAL: Resolver problemas de probabilidade em situações cotidianas

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- **Identificar problemas que envolvem o conceito de probabilidade;**
- **Utilizar o conceito de fatorial para calcular os resultados possíveis do experimento aleatório proposto no problema;**
- **Desenvolver habilidades para resolução de problemas.**

MATERIAIS:
Quadro branco e pincel

TEMPO: 50 min

DESENVOLVIMENTO:
A aula inicia com a professora pedindo para os alunos formarem duplas para que acompanhe a resolução da questão (Anexo), que é distribuída para cada dupla. Em seguida a professora lê a seguinte situação problema:

1. (Livro: contato matemática 2016) A ararinha azul (Cyanopsitta spixii) habitava o nordeste brasileiro e foi extinta da natureza em 2000. Atualmente existem poucos exemplares, em cativeiros espalhados por várias partes do mundo. A destruição de seu habitat natural e o tráfico de animais foram os principais responsáveis pela extinção dessa ave.

Fonte: https://ciclovivo.com.br/planeta/meio-ambiente/ararinha-azul-considerada-extinta-e-vista-na-natureza-apos-14-anos/. Acesso em 24 de jul. 2018

Suponho que em um cativeiro existem 5 exemplares de ararinhas azuis fêmeas e 8 machos, qual a probabilidade de se retirar ao acaso desse cativeiro:
Qual a probabilidade de se retirar ao acaso ou seja aleatoriamente desse cativeiro e elas serem do mesmo sexo?
A professora pergunta aos alunos: O que o problema quer? Conforme as respostas dos alunos, a professora começa a resolução da questão:

1ª passo: Compreender o problema
O problema consiste em encontrarmos a probabilidade de retirarmos do cativeiro duas ararinhas e elas serem do mesmo sexo.

$$P(pares\ do\ mesmo\ sexo) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

2ª passo: Planejar uma estratégia
Precisamos encontrar o total de pares possíveis neste cativeiro que consiste no número de casos possíveis e em seguida identificar a quantidade de pares do mesmo sexo que será o número de casos favoráveis. Assim, a resolução do problema será:

$$P(pares\ do\ mesmo\ sexo) = \frac{(número\ de\ pares\ do\ mesmo\ sexo)}{(número\ total\ de\ pares)}$$

Para identificarmos a quantidade de pares desse cativeiro temos: Neste caso, de exemplares de machos e fêmeas tomados dois a dois, a ordem não importa, com isso temos que combinar n elementos tomados p a p grupos, que é o conceito de combinação.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Onde n é o total elementos e p o agrupamento.

3ª passo: Executar a estratégia planejada

Ao somarmos os 5 machos com as 8 fêmeas o total será de 13 ararinhas, agora queremos a quantidade de pares do cativeiro, assim vamos combinas as 13 ararinhas em grupos de 2. Pelo conceito de combinação, temos que o total de agrupamentos será:

$$(\text{número total de pares}) = C_{13,2} = \frac{13!}{2!\,(13-2)!} = 78$$

E para encontrarmos a quantidade de pares do mesmo sexo. Pelo conceito de combinação vamos verificar quantos grupos de 2 podem ser formados com os 5 machos do cativeiro:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = 10$$

Também pelo conceito de combinação vamos verificar quantos grupos de 2 podem ser formados com as 8 fêmeas do cativeiro:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!\,2!} = 28$$

A professora apresenta como o total de combinações pode ser visualizado por meio de um diagrama de árvore com as ararinhas confeccionadas de papelão.

Assim o número de casos favoráveis será:

$$(número\ de\ pares\ do\ mesmo\ sexo) = C_{5,2} + C_{8,2} = 10 + 28 = 38$$

Logo a probabilidade de retirarmos duas ararinhas azuis do mesmo sexo é:

$$P(pares\ do\ mesmo\ sexo) = \frac{(número\ de\ pares\ do\ mesmo\ sexo)}{(número\ total\ de\ pares)} = \frac{38}{78} = 48{,}72\%$$

4ª passo: Verificar e interpretar os resultados obtidos.

A chance de se retirar duas ararinhas azuis e elas serem do mesmo sexo é de 48,72%

E qual a probabilidade de se retirar ao acaso, ou seja aleatoriamente do mesmo cativeiro duas ararinhas e elas formarem um casal?

A professora reserva um tempo de 10 minutos para que os alunos tentem ou apresentem uma solução para o problema.

1ª passo: Compreender o problema

Diferente do que foi proposto no exemplo anterior estamos interessados em encontrar a probabilidade de casais. Este problema será solucionado ao calcularmos:

$$P(casais) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

2ª passo: Planejar uma estratégia
Para solucionarmos o problema a probabilidade será:

$$P(casais) = \frac{número\ de\ casais}{número\ total\ de\ pares}$$

O número de casos favoráveis será a combinação dos 5 machos e as 8 fêmeas agrupados em 2, neste caso a ordem não importa, novamente vamos utilizar o conceito de combinação para nos auxiliar.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Onde n é o total de elementos e p o agrupamento.

3ª passo: Executar a estratégia planejada
Somando a quantidade de machos e fêmeas, temos um total de 13 ararinhas, vamos agrupar todas em grupos de 2, assim o total de agrupamentos será:

$(número\ total\ de\ pares) = C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)!2!} = 78$

Estamos interessados no número de casais para identificarmos o número de casos favoráveis. Pelo conceito de combinação:

$$(número\ de\ casais) = C_{8,1} \times C_{5,1} = \frac{8!}{(8-1)!\,1!} \times \frac{5!}{(5-1)!\,1!} = 8 \times 5 = 40$$

A professora constrói um diagrama de arvore com as ararinhas de papelão para que os alunos visualizem os possíveis pares pelo princípio fundamental da contagem.
Assim, a probabilidade será:

$$P(casais) = \frac{(número\ de\ casais)}{(número\ total\ de\ pares)} = \frac{40}{78} = 51{,}28\%$$

4ª passo: Analisar os resultados obtidos.
A chance de se retirar um casal deste cativeiro é de 51,28%

REFERÊNCIAS

Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2002.

Material teórico – Módulo Introdução à Probabilidade. Disponível em: <https://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cwxho8oykn408.pdf>. Acesso em: 7 de maio 2018

SOUZA, J.; RIBEIRO, J. #Contato matemática, 2ºano. São Paulo: FDT, 2016.- (Coleção Contato matemática)

APÊNDICE E
(Plano de Aula 4)

PLANO DE AULA

Dados de identificação
Estagiária: Natália Lima de Oliveira
Disciplina: Matemática
Nível de ensino: Ensino Médio
Série: 2ª ano
Data:
Local: Escola Estadual Nossa Senhora de Aparecida

TEMA DA AULA:

Cálculo de Probabilidades

OBJETIVO GERAL: Resolver problemas que envolvam o conceito de probabilidade em situações cotidianas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- **Resolver problemas de probabilidade do Exame Nacional do Ensino Médio;**
- **Desenvolver habilidades para interpretar o problemas.**

MATERIAIS:
Quadro branco e pincel, folhas impressas com o problema.

TEMPO: 50 min

Em seguida a professora apresenta os seguintes problemas:

2. (Enem 2014 – 158 – prova Brasil) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizaram-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer neste teste:
   E. Paciente tem doença e o resultado do teste é positivo.
   F. Paciente tem a doença e o resultado do teste é negativo.
   G. Paciente não tem a doença e o resultado do teste é positivo.
   H. Paciente não tem a doença e o resultado do teste é negativo.

   Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser positivo se o paciente estiver com a doença.

   O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	**Doença A**	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, 2011 (Adaptado)

Conforme o quadro teste proposto, a sensibilidade dele é de:

f) 47,5%
g) 85,0%
h) 86,3%
i) 94,4%
j) 95,0%

Solução: Método de Polya

1ª passo: Compreender o problema

Precisamos saber o que realmente é dado e o que é pedido. O problema propõe a análise do desempenho de um método diagnóstico de uma doença denominada A. O problema requer que encontremos a sensibilidade do teste que consiste em encontrar a probabilidade de o resultado ser positivo e o paciente estiver com a doença.

2ª passo: Planejar uma estratégia para resolver o problema.

De acordo com os dados do problema, podemos calcular a sensibilidade do teste, usando o conceito de probabilidade de eventos equiprováveis:

$$Sensibilidade = \frac{Resultados\ positivos}{Pessoas\ com\ a\ doença}.$$

3ª passo: Executar a estratégia planejada, se possível rever tudo se necessário. Assim temos:

$$Sensibilidade = \frac{Quantidade\ de\ pacientes\ positivos}{Quantidade\ de\ pacientes} = \frac{95}{100} = 95{,}0\%$$ letra E

4ª passo: Verificar e interpretar os resultados obtidos, conferir se os resultados fazem sentido.

A chance de o resultado ser positivo e o paciente estiver com a doença é de 95,0%

REFERÊNCIAS

Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2002.

Material teórico – Módulo Introdução à Probabilidade. Disponível em: <https://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cwxho8oykn408.pdf>. Acesso em: 7 de maio 2018

SOUZA, J.; RIBEIRO, J. #Contato matemática, 2ºano. São Paulo: FDT, 2016.-(Coleção Contato matemática)

INEP – Prova de Redação e de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias , prova de Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/CAD_ENEM_2014_DIA_2_05_AMARELO.pdf>. Acesso em 5 de maio de 2018.

APÊNDICE F

(Questionário Avaliativo)

Escola Estadual Nossa Senhora de Aparecida
Nome:
Turma/Série: 2 ano 1

1. Leia a seguinte tirinha:

Disponível em: https://www.humorcomciencia.com/blog/112-matematica/. Acesso em 23 Jul 2018 (adaptado).

Seria possível identificar qual dos dois seria o ganhador desse jogo? Explique.

____

____

____

____

____

____

____

2. O peixe boi da Amazônia é um mamífero aquático conhecido como *Trichechus inunguis*, se alimenta apenas de algas, chega a pesar cerca de 300kg e a medir 2,5m.

Fonte: http://g1.globo.com/am/amazonas/noticia/2014/09/matanca-de-peixe-boi-no-am-tambem-e-culpa-do-consumidor-diz-veterinario.html. Acesso em 23 Jul 2018 (adaptado).

Supondo que no cativeiro do Instituto de Pesquisas da Amazônia (INPA) existam 3 machos e 4 fêmeas. Qual a probabilidade de se retirar aleatoriamente duas fêmeas desse cativeiro?

3. (ENEM-2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Questão sobre Probabilidade no Enem de 2011

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%
b) 9%
c) 11%
d) 12%
e) 22%

4. Considere o seguinte problema:
   Qual a probabilidade de aleatoriamente, escolhermos um número ímpar dentre os elementos do seguinte conjunto $\{10,11,12,\ldots,30\}$?
   Quais são as fases para resolver este problema?
   (   ) Investigar o problema, Analisar as alternativas, calcular e interpretar os resultados
   (   ) Calcular o que pede o problema, verificar o que se pede, solucionar com uma estratégia e argumentar o porquê da estratégia.
   (   ) Compreender o problema, planejar uma estratégia, executar a estratégia e analisar os resultados obtidos
   (   ) Interpretar os resultados, calcular as supostas alternativas, executar a estratégia e verificar se a estratégia está correta.
5. Resolva: Qual a probabilidade de aleatoriamente, escolhermos um número ímpar dentre os elementos do seguinte conjunto$\{10,11,12,\ldots,30\}$?

6. Descreva com suas palavras a importância da probabilidade em seu cotidiano.
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____