Universidade do estado do amazonas

Escola normal superior

Licenciatura em matemática

Maxwell Meireles Sena

Uma proposta de ensino da geometria fractal para o 9º ano do ensino fundamental

MANAUS

2018

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMATICA

Uma proposta de ensino da geometria fractal para o 9º ano do ensino fundamental.

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC II *do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.*

Orientador (a): Prof. MSc. Marcos Marreiro Salvatierra

Manaus

2018

GOVERNO DO ESTADO DO
AMAZONAS

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **MAXWELL MEIRELES SENA** **Aos 28 dias do mês de novembro de 2018**, às 20:10 horas, em sessão pública na Sala Odalea Frazão da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pelo professor da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Me. MARCOS SALVATIERRA, Me. MAURO JUNIOR BATISTA AMAZONAS** e **Me. OMAR LATORRE VILCA** o aluno **MAXWELL MEIRELES SENA** apresentou o Trabalho: **"UMA PROPOSTA DE ENSINO DA GEOMETRIA FRACTAL PARA O 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL."** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 8,6 à monografia divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Presidente da Banca Examinadora

Orientador (a)

Avaliador 1

Avaliador 2

DEDICATÓRIA:

Dedico esse trabalho de tcc aos meus amigos que direta (diretamente) ou indiretamente me ajudaram a concluir.

AGRADECIMENTO

Você não precisa ter feito nada do que fez por mim. Mas fez, e não pediu nada em troca. Devo a você minha gratidão Cleonice Jansen Meireles (mãe)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Sumário

INTRODUÇÃO

A utilização de recursos manipuláveis tem despertado o interesse dos alunos, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, o senso de estética e a criatividade, entre outras habilidades.

Este trabalho propõe a inclusão do estudo de Geometria Fractal no ensino fundamental, especialmente por sua possibilidade de tornar a aprendizagem da Matemática mais significativa para os alunos. A descrição dos objetos naturais é, com frequência, mais complicada e exige uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projetos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenômenos. Os fractais são ampliações da aplicação de conceitos matemáticos, que podem permitir que os alunos visualizassem suas aplicações nas artes, ou na ciência. Nesta perspectiva, surgem as questões: É possível trabalhar o ensino de fractais no 9º ano do ensino fundamental? Como trabalhar explorando esse conteúdo em sala de aula? Esta proposta proporcionará um ensino de qualidade?

Assim, neste trabalho será descrito teórica e pratico a exploração dos fractais como uma proposta de ensino de Matemática que pode colaborar para o ensino do conteúdo de formas geométricas, diferente da geometria comumente utilizada em sala de aula (euclidiana).

O objetivo geral deste projeto é apresentar uma proposta de ensino de Geometria Fractal para o 9º ano do ensino fundamental. Partindo daí, os objetivos específicos definem-se como: descrever a metodologia a ser utilizada com os alunos; estudar o conteúdo de geometria plana, área e perímetro para poder entender como e feito à construção dos fractais como a pirâmide de Sierpinski; curva de peano curva de Koch e estabelecer conexões dos conteúdos abordados com as concepções intuitivas do cotidiano dos alunos.

CAPITULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

A geometria dos fractais, ao ser descoberta vem se expandindo e cada dia nos estimulando a desenvolver nossa percepção junto ás suas formas e a um senso estético bem elevado, podendo apresentar diversos fenômenos naturais, e ainda ser aplicada a fenômenos sociais. Assim, os fractais apresentam as seguintes características: auto-semelhança, podendo ser exata ou estatística, isto é, mantém a mesma forma e estrutura, que se inicia das partes menores para as maiores; apresentam complexidade infinita, ou seja, os objetos fractais, não são finitos em sua estrutura dessa maneira, nem todas as formas existentes na natureza são regulares e suaves, sendo na maioria das vezes complexas e irregulares como: as nuvens, relâmpagos, certas árvores e plantas. Por este fato, não conseguimos de maneira satisfatória modela-los, utilizando-se a geometria euclidiana, mas é possível, quando fazemos uso da Geometria Fractal.

Alguns pesquisadores têm encontrado fractais em diversas áreas do conhecimento, dentre as quais, temos a medicina, arte, computação gráfica, geografia e economia. O matemático francês, Benoit Mandelbrot, (1924-2010), nasceu na Polônia em 1924, era de família judia, na Lituânia. Em 1936 sua família mudou-se para Paris, onde iniciou sua carreira acadêmica, obteve resultado brilhante ao longo de sua carreira. No entanto os fractais não foram descobertos nem criados por Mandelbrot, ele apenas os nomeou, visto que estes já eram conhecidos antes de sua descoberta.

A origem do termo fractal, nomeado por Mandelbrot, está no radical *fractus*, proveniente do verbo latino *frangere*, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares, vem da mesma raiz da palavra fragmentar, em português.

> No Egito, desde 1300 A.C a Geometria já era assunto corrente. Agricultores usavam-na para medir terrenos e construtores recorriam a ela para suas edificações. A existência das grandes pirâmides perto do Nilo prova que os egípcios conheciam Geometria e sabiam usá-la bem. Tão famosa era a geometria egípcia que matemáticos gregos como Tales e Pitágoras viajavam de sua terra ao Egito para ver o que havia de novo em matéria de Geometria. (DANTE, 2005, p.359).

A geometria antes dos gregos era puramente experimental e foram eles os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo, por volta de 600 a.c os filósofos e matemáticos gregos como Tales e Pitágoras passaram a sistematizar os conhecimentos da época. A principal fonte de informação relacionada à Geometria egípcia antiga é o chamado “Papiro de Rhind”, cuja data é aproximadamente de 1650 a.c, são textos matemáticos e contém 85 problemas relacionados à geometria. “A maioria desses problemas provém de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas e volumes de celeiros”. (EVES, 1992. p. 5).

> Isto tem uma implicação muito interessante. É possível, como os objetos fractais criar estruturas complexas a partir de regras simples. A complexidade do objeto deriva não de um conjunto de regras muito complicadas, mas sim da sua interação ao longo do tempo. É um processo elementar que, quando repetido sobre si mesmo, cria estruturas complexas. (MANDELBROT apud SANTOS, NETO, E SILVA, 2005, p. 25).

De acordo com Mandelbrot (2005), os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões completos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.

Tais conceitos de Geometria fractal, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, por muito tempo foram relegados, ficando para o final do ano letivo, quando havia tempo, e muitas vezes, eram apresentados de forma expositiva em que o professor apresentava definições, exemplos e os alunos resolviam listas de exercícios, limitando seu ensino apenas à sua forma abstrata e axiomática e a aprendizagem por memorização de regras e fórmulas. “Quanto às formas, o professor estimula a observação de característica das figuras tridimensionais e bidimensionais o que lhe permite identificar propriedades” (BRASIL, 1997, p 58).

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.(BRASIL, 1998, p 51).

Embora haja a recomendação de explorar os fractais em sala de aula, isso quase não ocorre, pois são poucos os professores que tiveram oportunidade de estudar o tema no seu curso de licenciatura, acarretando assim, um desconforto ao docente, pois a insegurança em relação ao assunto poderá impedir o seu ensino na escola. Esse panorama só poderá ser modificado se os centros formadores de professores de Matemática passar a abordar o tema no curso de Licenciatura. Porém, para isso ocorrer é preciso mais pesquisas sobre como isso pode ser feito. É nesse sentido que consideramos as contribuições da pesquisa aqui apresentada.

1.1 Definições de Fractais:

Conforme o Dicionário Aurélio, a definição de fractal, é uma Forma Geométrica, de aspecto irregular ou fragmentado, que pode ser subdividida indefinidamente em partes, as quais, de certo modo, são cópias reduzidas do todo. A definição mais simples é que Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo periódico, apresentando autos-semelhanças e complexidade infinita. Nesta geometria os objetos são definidos como possuindo uma, duas ou três dimensões, como os pontos, as retas, os planos ou nos sólidos. Objetos naturais tais como nuvens, montanhas, arbustos e plantas possuem uma característica de irregularidade que dificilmente é descrita pela geometria euclidiana; além disso, no mundo real, um mesmo objeto pode ser visto de duas formas diferentes: visão macroscópica ou microscópica. O matemático Benoit Mandelbrot foi quem deu esse nome e chama de geometria Fractal ele foi o responsável por investigar propriedades e comportamentos de figuras mais complexas as quais a geometria euclidiana não é capaz de representar.

1.2 Propriedades que Define o Conjunto dos Fractais

- ***Auto-similaridade*: **No entanto pode ser exata ou estatística, ou seja, mantém forma e estrutura sob uma mesma transformação de escala (transformação que reduz ou amplia o objeto ou parte dele);

- ***Complexidade infinita:*** isto é, qualquer que seja o número de amplificações de um objeto fractal, nunca obterá a "imagem final", uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.
- ***Irregularidade***: no sentido de rugosidade (não suavidade) ou fragmentação, possuir em geral*, dimensão não inteira* a dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado.

A auto-similaridade aproximada ou estatística refere-se principalmente a objetos da natureza que não são fractais exatos, mas podem ser muito bem descrito por eles, como por exemplo, a estrutura da couve-flor. No caso de determinadas plantas, pode-se encontrar certa semelhança entre as pequenas folhas que constituem um pequeno ramo com outros ramos maiores, e que assim sucessivamente irão gerar uma planta, que afinal não é muito diferente do pequeno ramo inicial, isto mostra que os fractais são pouco explorados dentro dessa área da natureza. .

1.3 Fractais na natureza

Na verdade, a geometria fractal coloca em contratempo a noção de complexidade, é um convite a olhar a natureza sob outra ótica. Formas encontradas nos animais e plantas chamam a atenção dos matemáticos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas do mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Mas além dos padrões de forma, existem os padrões de movimento, como o andar humano, onde os pés tocam o solo num ritmo regular, esquerdo-direito, uma cobra do deserto que se move como uma espiral, jogando seu corpo para frente em forma de curvas tentando minimizar seu contato com a areia quente. A simetria da natureza é também muitas vezes imperfeita, existindo a outra categoria de padrões naturais, padrões que existem onde pensávamos que tudo era aleatório e sem forma, estes padrões são chamados de fractais.

Os fractais naturais estão à nossa volta, basta observarmos as nuvens, as montanhas, os rios e seus afluentes, os sistemas de vasos sanguíneos, etc. Estes objetos foram realmente estudados a fundo no século XX. Considera-se que alguns objetos da natureza, como montanhas, árvores e plantas, têm propriedades fractais. Na figura a seguir podemos observar em diferentes ampliações, a complexidade desta planta, que apresenta a propriedade de auto-semelhança, característica dos fractais. Estas propriedades sugerem uma ligação entre os fractais e a natureza.

Figura 1: Brócolis apresentando auto-similaridade

Fonte: http://fractalmatematico.blogspot.com.br/

Na figura 01 mostra um brócolis comparando com um feto, o brócolis e auto similar, pois sua estrura e igual em todo seu corpo conforme ele vai crescendo sua estrura não muda.

1.4 Algumas Aplicações

1.4.1 Na Biologia

No entanto, as propriedades fractais em diferentes sistemas biológicos têm natureza muito diferente, origem e aparência. Em alguns casos, é a forma geométrica do objeto biológico que exibe uma aplicação interessante dos fractais que mistura biologia e geometria, a geometria fractal se dispõe a medir o contorno complexo e irregular do tronco de arvores, assim tudo leva apensar nas escolhas do local para viver, oferecendo abrigo e proteção contra predadores, onde alguns animais fazem moradias contra predadores.

Figura 2: Tronco de uma árvore

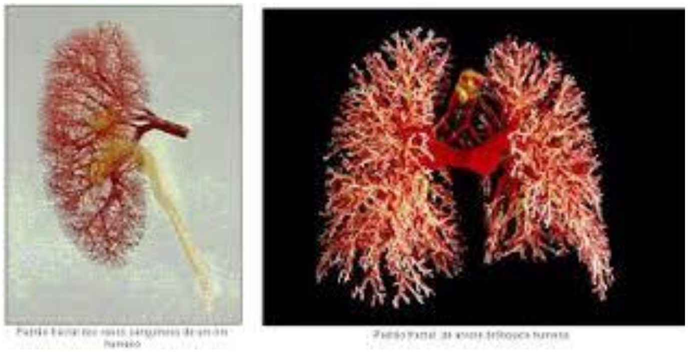
Fonte: //http//goo. Gl/imagens/6qksub

Os pesquisadores também mediram as dimensões de sistemas de raízes e concluiu-se que a dimensão fractal de um sistema de raízes vai aumentando ao longo do tempo e varia conforme a espécie na forragem de fungos a dimensão fractal varia entre as espécies e tende a ser maior quando há mais nutrientes, o tronco subdivide-se em vários ramos que por sua vez se dividem em ramos mais estreitos e assim por diante. O que podemos observar é a similaridade aproximada entre uma pequena fração e a totalidade da árvore.

1.4.2 No campo da Medicina

A ramificação fractal amplifica grandemente a área da superfície de um tecido quer seja para absorção (pulmão ou no intestino). No corpo humano o batimento cardíaco saudável é caótico e não regular, a representação gráfica de um batimento cardíaco revela auto-similaridade em diversas escalas de tempo, a ramificação da fisiologia do ser humano encontra-se em sistemas como: respiratório, circulatório e nervoso, pois possuem uma estrutura altamente ramificada. Além disso, a redundância de estruturas fractais a análise destes padrões pode ser útil para a detecção da mudança vascular precoce, em doenças da retina, e também para proporcionar conhecimento sobre a progressão da retina nos processos de doença torna-a robusta contra lesões.

Figura 3: Pulmão humano ramificado



Fonte: // http//goo. Gl/imagens/ 9uh9n1

1.5 Alguns fractais percussores

1.5.1 Triângulo de Sierpinski

Václav Sierpinski nasceu em 14 de março de 1882 em Varsóvia, Império Russo atual Polônia, faleceu em 21 de outubro de 1969 em sua cidade natal. Apesar de dificuldades impostas pela ocupação da Polônia pelo império russo Sierpinski entrou para o departamento de física e matemática da universidade de Varsóvia em 1899 e na década 1920-1930, uma das crateras lunares ganho o seu nome. No ano de 1916 Sierpinski manifestou um dos famosos “monstros” em seu trabalho. Para construir um triângulo de Sierpinski indicam-se os seguintes procedimentos:

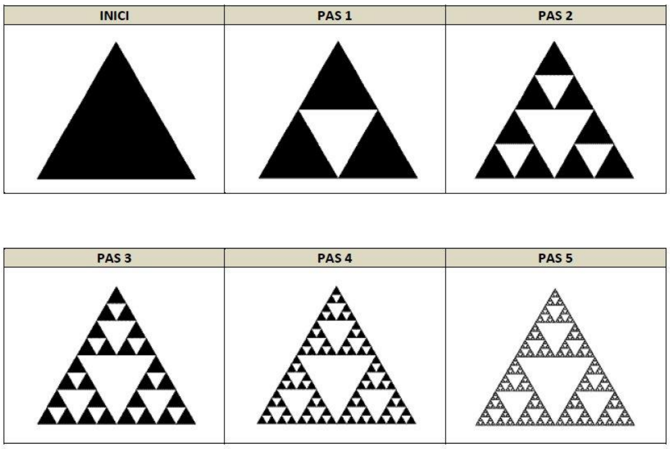
1. Considera-se um triângulo equilátero:

2. Marcam-se os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;

3. Elimina-se (remover) a central, o que pode ser codificado, por exemplo, com cor branca e os outros com uma cor preta;

4. Repetem-se em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3; 5. Repete-se operação 4 sucessivamente.

Figura 4: Triângulo de Sierpinski



Fonte: http: // terra. es/personal/davinci9/leuka/triang2.gif

O Triângulo de Sierpinski também conhecido como junta de Sierpinski e uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo apresenta algumas propriedades tais como: ter tantos pontos como o conjunto dos números reais; ter área igual à zero; ser auto-semelhante conforme vai se ampliando não perde a definição inicial. Foi o primeiro descrito em 1915 por Waclaw Sierpinski (1882-1969)

Para demostrar o que se origina do triângulo primitivo no nível zero após várias operações sucessivamente, expressas o comprimento que aparecerá em cada nível como a soma dos triângulos pertencentes:

Tabela 1: Quantidade de triângulo que resta em cada nível de construção do triângulo de Sierpinski

Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	....	Nível n
$L_0 = 1$	$L_1 = 3/4$	$L_2 = 9/16$	$L_3 = 27/34$	....	$l_k = (3/4)^n$

Assim o nível n pode ser concluir:

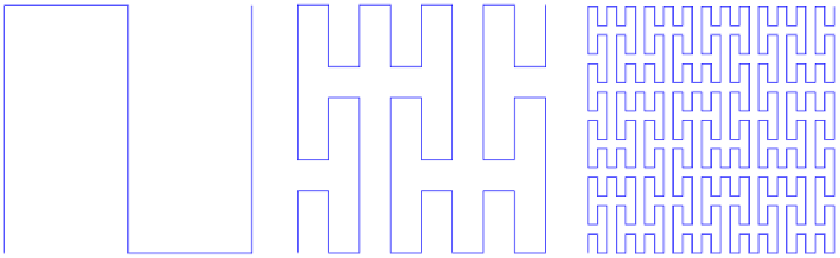
$$\lim_{n\to\infty} l^{\,2} = 0$$

Assim o triângulo que restar tende a anular quando o nível n. A figura contém infinitos pontos no triângulo original ocupado no nível zero, entre os quais existem intervalos vazios de diversas extensões.

1.5.2 Curva de Peano:

Giusepe Peano nasceu a 27 de agosto de 1858 em Cuneo, na Itália e faleceu em Turim no dia 20 de abril de 1932. Em 1895 foi professor de a Academia Militar de Turim, onde trabalhou com Joseph Louis Lagrange. Diante das preocupações dos grandes matemáticos da época, Peano teve um grande tributo à matemática no desenvolvimento da axiomatização para os números inteiros (positivos). Em 1890 procedeu todo o desenvolvimento do conhecimento elementar de continuidade e dimensão, elaborou e publicou sua famosa curva, que foi considerada um “monstro matemático”, proposta como uma curva que cobre toda uma superfície plana quadrangular.

Figura 5: Curva de peano



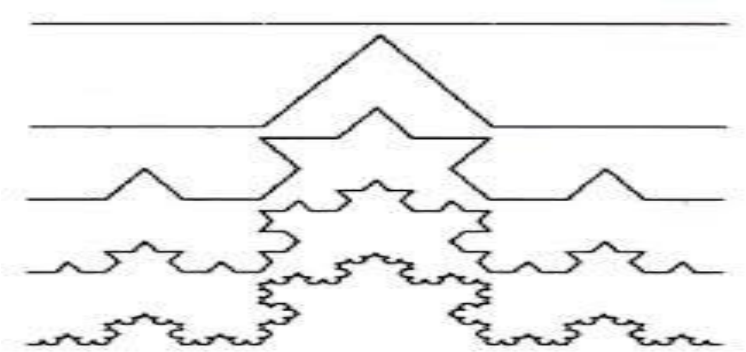
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm

A curva de Peano, levando a construção ao infinito, será uma superfície completamente preenchida deduz-se que esta superfície será um Quadrado.

1.5.3 Curva de Koch

Niels Fabian Helge Von Koch (1870 - 1924) foi um matemático sueco, nascido em Estocolmo, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como o "floco de neve Koch" foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito. A partir de um segmento, divida-o em três partes iguais e retira-se o terço médio e o substitua por um triângulo equilátero sem a sua base. Com isso teremos quatro novos segmentos com o comprimento de um terço do original. Repete-se esse mesmo procedimento, novamente, agora com os quatro seguimentos restantes.

Figura 6: Curva de Koch



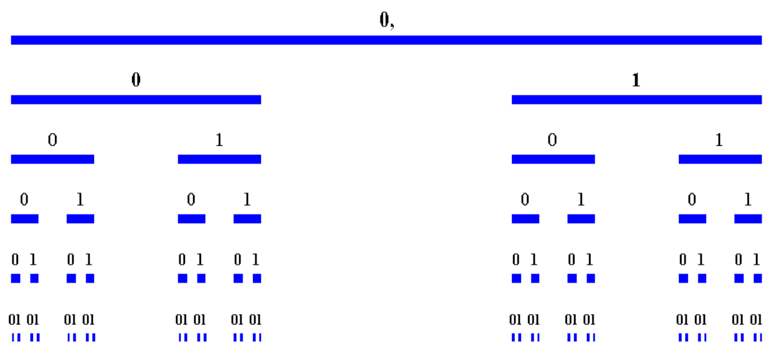
Fonte: https:/usp digital. usp. br

Tal curva é obtida a partir de um segmento de reta com um comprimento unitário que, fragmentado em três partes iguais, retira-se a parte do meio e colocam-se em seu lugar dois lados de um triangulo equilátero de acordo com o segmento removido. Tal processo sendo repetidas infinitas vezes origina o que chamam de a curva de Koch.

1.5.4 Conjunto de Cantor:

Georg Cantor (1845-1918), matemático, nascido na Rússia, mudou-se em 1856 para Alemanha onde se doutorou pela Universidade de Berlim em 1867. Ficou conhecido por ter elaborado a moderna Teoria dos Conjuntos. Segundo Cantor dois conjuntos é equivalente, ou têm a mesma cardinalidade, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos destes dois conjuntos, isto é, uma relação que leve elemento distinto de um conjunto em elementos distintos do outro conjunto, sendo todos os elementos objetos desta correspondência. Cantor denominou de enumerável os conjuntos que tem a mesma cardinalidade com o conjunto dos números naturais.

Figura 7: Conjunto de canto



Fonte: https://goo. Gol/imagens/gy3PU

Imaginava-se então que dois conjuntos infinitos possuíam a mesma cardinalidade, até que em 1894, Cantor demonstra que o conjunto dos números reais tem cardinalidade diferente da dos números naturais. É possível mostrar que o “tamanho" do Conjunto do Cantor, ou seja, seu número de pontos matemáticos ou sua cardinalidade é a mesma do segmento [0,1] (e, portanto de toda a reta), apesar do tanto que se tira do segmento durante a construção do conjunto.

Alguns *Fractais* são construídos a partir de objetos geométricos estudados na educação básica, tais como segmentos de reta, triângulos e quadrados. Outros são construídos por meio de programas computacionais com a utilização de dezenas de cores, apresentam uma movimentação com forte apelo estético e, numa visão superficial, não aparentam possuir ligação com os conteúdos matemáticos que constituem os currículos escolares.

1.6 Fractais no ensino

A geometria Fractal é um campo da matemática muito produtivo e sua aplicabilidade é vasta. Dessa forma a sua utilização no ensino fica assegurada pela capacidade de adaptação dessa geometria*,* Tendo em vista o valor que estudo de geometria exerce na vida das pessoas, precisa-se priorizar o seu ensino e também investir intensamente em cursos de formação continuada para os professores, que foram fragilizados com a carência desses conteúdos em seus cursos.

Estudar fractais em sala de aula é bem empolgante, pois as figuras apresentam formas interessantes e ricas em padrões de cores. Os jovens e adultos se interessam por essa multiplicidade de formas e cores presentes nas diversas formas Fractais e também é um motivador pelo fato de estarem ligados à informática, possibilitando sua construção quase que instantaneamente. Para que exista uma maior proximidade entre os fractais e os alunos do ensino fundamental, e necessário um melhor entendimento, algumas práticas podem ser realizadas com os alunos para que eles possam visualizar os Fractais sem o uso de computadores. Uma prática interessante, já que os Fractais estão muito ligados à natureza, seria que o professor levasse os alunos para observar um jardim, ou uma paisagem natural para que eles mesmos possam adaptar-se as formas Fractais naturais que se encontra em seu cotidiano. Esta prática seria interessante para que haja uma interdisciplinaridade. Assim a matemática não será vista como números e contas sem aplicações.

Nunes (2006) lembra alguns pontos importantes para justificar a inclusão da geometria fractal nos currículos de matemática da educação básica, ele defende que ela seja inserida no ensino de matemática e se torne um tema motivador tanto para o docente quanto para os alunos, e ainda é um tema integrador de vários conceitos matemáticos. Sua aplicabilidade se estende a outras ciências e dessa forma um trabalho mais atraente pode ser desenvolvido com alunos nas diferentes etapas da escolaridade.

> Estudar as relações numéricas de seus elementos, conforme as iterações sucessivas; por exemplo, contagem, perímetros, áreas e volumes. [...] Outra forma é explorar os fractais despertando ou desenvolvendo o senso estético, pela visualização dos mesmos, quando o professor, em nosso entender, deve procurar captar o educando para o belo e o harmônico no fractal. (BARBOSA, 2005, p.71)

Segundo Barbosa (2005) a exploração numérica acontece quando o professor mostra alguns conceitos básicos do fractal como área e perímetro e interações dos fractais ele pode ajudar seu aluno a explora, as características dos fractais. Além disso, a atividade com dobraduras de papel facilita o entendimento da generalização dos números de iterações em um fractal e acabam por possibilitar também a exploração de elementos algébricos.

Durante a construção com dobradura de papel o aluno vai ver o senso estético, de um fractal chamado à atenção, por se tratar de um fractal, normalmente desconhecido, fazendo-o imaginar qual formato de tal figura assumiria nas próximas iterações fazendo com que estimule sua imaginação. Não podemos esquecer também do fato de que, em muitas das atividades, é exigido o manuseio de objetos de medição, como régua e trena o que contribui diretamente também para a compreensão de outros assuntos como a geometria plana.

Os PCNs (parâmetros currilares nacionais) do Ensino Fundamental lembram a importância do estudo de conceitos geométricos para desenvolver no aluno a compreensão e a representação, de maneira organizada, do mundo em que vive. Além disso, é fundamental o uso de objetos do mundo físico, obras de artes, desenhos, plantas. Cultivando o conhecimento acerca do espaço e das formas, desse modo permite ao aluno que estabeleça conexões entre a Matemática e outras ciências (BRASIL, 1998).

Conforme consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), é importante destacar que a matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento de seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, estética e de sua imaginação e com isso compreender cada vez mais o mundo que o cerca. E é necessário que os professores promovam uma visão da matemática como uma ciência em evolução, não algo pronto e definitivo, levando o aluno a construir e se apropriar do conhecimento que servirá para transformar sua realidade.

Capitulo 2

Metodologia da pesquisa

2.1 Sujeitos da pesquisa

Os sujeitos desta pesquisa foram alunos do Ensino Fundamental, **EJA (**educação de jovem e adulto) do 9ª ano no turno noturno em uma escola da zona sul no bairro de educandos Manaus-AM, essa pesquisa foi desenvolvida com 16 alunos com idade entre 20 e 40 anos, foi realizado duas vezes na semana durante o mês junho a outubro de 2018.

O critério para a escolha da turma foi por meio da liberação da direção da escola para assumir a turma, em questão tendo em vista que no momento da realização da pesquisa o professor acolhedor estava presente.

Este trabalho demonstra uma proposta de atividades com dobradura de papel que exploram a geometria dos fractais através da construção da pirâmide de Sierpinski, Curva de Koch e o Conjunto de Cantor. A metodologia de ensino proposta visa apresentar o ensino dos Fractais aos alunos por meio de dobraduras de papel no origami e traceja alguma forma geométrica que pode ajudar no entendimento dos alunos. A geometria dos fractais pode tornar as aulas mais atrativas, pois a exploração da beleza estética do raciocino e os padrões numéricos e geométricos, estimulam o aprendizado a competências dos alunos, sendo assim de fácil interpretação.

2.2 A abordagem metodológica

Na busca de responder a questão que norteou a pesquisa:

- É possível trabalhar o ensino de fractais no 9º ano do ensino fundamental?
- Como trabalhar explorando esse conteúdo em sala de aula?
- Esta proposta proporcionará um ensino de qualidade?

Por meio de diferentes atividades, a pesquisa se caracterizou como qualitativa.

Do ponto de vista da sua natureza, o trabalho foi classificado como uma pesquisa aplicada, pois objetivou gerar conhecimentos aos alunos no uso de aplicações e práticas dirigidas à solução de problemas específicos.

As atividades desenvolvidas com os alunos em sala de aula foram divididas em momentos:

O primeiro momento, com o objetivo de analisar os conhecimentos prévios dos alunos, em relação aos conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana trabalhou-se com conhecimento prévio de área de figuras planas e perímetro (apêndice A) a aula iniciou com uma narrativa sobre a história da geometria onde trabalhou os conceitos de geometria plana, abordando, especificamente, as propriedades de alguns polígonos, e seus elementos como: lados, vértices, diagonais, e nomenclaturas de alguns polígonos.

Durante a abordagem da aula buscou-se mostrar no cotidiano dos alunos que a geometria estava presente, exemplos como “Quando você vai a uma loja de material de construção pra fazer orçamento de quantos tijolos pra construir um muro ou uma parede para sua casa precisa” nesse contexto foi-se trabalhando a geometria euclidiana.

No segundo momento (apêndice B), o objetivo foi proporcionar aos alunos uma aula diferenciada e dinâmica, motivando-os a querer estudar geometria e melhorar seu desempenho nas aulas de matemática. Trabalhando com geometria plana através de materiais concretos, fazendo com que o aluno supere seu processo de ensino-aprendizagem. No decorrer das atividades as aulas vão acontecendo com dobradura de papel foi se criando formas geométricas como triângulos. Os alunos receberam instruções de forma teórica e pratica de como proceder para realizar dobradura de alguns modelos de origami. Na construção com dobradura de um cisne. Cada aluno recebeu certa quantidade de papel que já estarão cortados em formas de quadrados (21 cm x 21 cm) para a prática da dobradura. Foram abordados alguns tópicos como área do quadrado e do triangulo, diagonal, bissetriz, ângulos.

No terceiro momento (apêndice B) com o uso de dobradura de papel foi se construindo pirâmide de Sierpinski, Conjunto de Cantor e Curva de Koch essa construção foi feita com dobradura de papel passo a passo para poder a turma acompanhar os cortes no papel, foi usado papel A4 para a construção das dobraduras, todos os alunos acharam interessante e muito curioso à forma como foram feito os fractais e suas interações geométricas, assim efetivando o processo ensino e aprendizagem dos alunos.

2.3 Instrumentos de coleta de dados

Foi utilizada a observação de participante em todo o decorrer das aulas com dobradura de papel de alguns Fractais. No final das atividades foi aplicado com os 16 alunos um questionário composto de 6 perguntas (apêndice F) com o objetivo de verificar a contribuição da abordagem dos Fractais no conhecimento de geometria.

No primeiro plano de aula foi feito uma breve explicação da geometria plana sobre área e perímetro (Apêndice A) denominados pré-teste serviu pra verificar como está o conhecimento dos alunos no aprendizado de geometria euclidiana.

No segundo momento buscou-se explicar um pouco sobre a origem do origami por meio de dobradura de papel, e de como essa cultura japonesa poderia nos ajudar a entender um pouco a geometria plana (apêndice B). No entanto, o interesse deles ficou mais evidente a partir dessa segunda aula uma vez que foram usados papéis coloridos para formar um cisne, possibilitando com isso que desenvolvessem sua criatividade.

O terceiro momento o plano de aula (apêndice C) trata da aplicação de alguns fractais no ensino e na aprendizagem dos alunos, com alguns conceitos de potenciação. Ambos os exercícios trazem situações onde o aluno tem de raciocinar sobre a quantidade de objetos a cada etapa dos recortes com o objetivo de concluírem que estão trabalhando com a multiplicação de fatores iguais.

O quarto questionário (apêndice F) trata-se de um questionário de pergunta e resposta. Onde se buscou sabe como os alunos aceitaram a proposta de ensino dos fractais e se essa aula surtiu algum conhecimento.

2.4 Procedimentos para a análise de dados

A análise foi feita através de organização dos dados coletados nos questionários (apêndice F) dos alunos em uma tabela ou um gráfico de forma descritiva comparando resultados com a fundamentação.

CAPITULO 3

APRESENTAÇÃO E ANALISE DOS RESULTADOS
SUGESTÕES DE ATIVIDADES SOBRE FRACTAL

Apresentam-se aqui algumas atividades que envolvem a Geometria Fractal, em que os alunos podem verificar que o ensino e a aprendizagem dessa Geometria pode ser prazeroso, a proposta inicial foi despertar nos alunos um interesse pelo assunto. Tais atividades serão desenvolvidas em sala de aula, com ajuda do professor acolhedor no ensino de Matemática, utilizando materiais manipuláveis sobre o ensino da Geometria Fractal, encontradas em diversos lugares, até mesmo na natureza. Essas atividades são sugestões para explorar a Geometria Fractal.

Assim, com essas atividades cabe mostrar que a matemática está em constante e infinita evolução, buscando atender às novas necessidades surgidas com a ciência contemporânea. Essas atividades podem ser utilizadas para a construção do conhecimento dos alunos, partindo do conhecimento prévio ou até mesmo de algo que eles ainda não conhecem.

A proposta dessa atividade tem como objetivo desenvolver e ampliar o conceito de simetria, através de diferentes formas da natureza e ainda apresentar os diferentes padrões de irregularidades para formas naturais que formam Fractais e assim diferenciar a Geometria Fractal da Geometria Euclidiana mostrando que em inúmeros momentos a Geometria Fractal está presente no dia-a-dia do discente.

Propõe-se então que o professor leve o aluno para a área verde da escola, ou até mesmo para um lugar onde possa visualizar diversas formas da natureza, pedindo ao aluno para identificar e fotografar formas geométricas que se assemelham às formas Euclidianas. Posteriormente, os alunos poderão distinguir as formas Euclidianas dos Fractais, onde os mesmos podem verificar a importância de se estudar essa nova Geometria.

Essa atividade se torna interessante e útil a partir do momento em que o aluno pode perceber que a matemática está em toda a parte, principalmente na natureza e que essa disciplina não é isolada, podendo se relacionar com diversas áreas como, Biologia, Geografia, História, entre outras. Consequentemente, faz com que o aluno possa valorizar e observar mais a natureza ao seu redor preservando-a continuamente, ao invés de destruí-la. Também, para que os discentes não visualizem a matemática apenas com algoritmos, números, desenvolvimento de fórmulas, podendo tornar o estudo dessa ciência mais prazerosa.

3.1 Propostas das atividades (Anexo A) e (Apêndice A)

3.1.1 Atividade com figuras geométricas, perímetro e área.

As atividades foram divididas em momentos:

Primeiro momento: será iniciado com a narrativa sobre a história da geometria. Conceitos da geometria, abordando, especificamente, as propriedades de alguns polígonos, seus elementos como: lados, vértices, diagonais, e a nomenclaturas de alguns polígonos.

Segundo momento: discutir com alunos situações do cotidiano que envolve conceito de área como:

a) Quando você vai a loja comprar cerâmica na loja para assentar um piso em seu quarto. Vendedor pergunta quantos metros quadrados ou quanto mede largura e comprimento do ambiente.

b) Quando você vai a uma loja de construção pra fazer orçamento de quantos tijolos pra construir um muro ou uma parede para sua casa, e necessário.

Terceiro momento: Recortou-se um quadrado de 5 cm x 5 cm mostrando as características (lados de mesma medida e ângulos retos) e mostrando na régua para os alunos que cada lado do quadrado possui 5 cm. E que a área no quadrado é dada pela multiplicação das 2 medidas .

Figura 8: Construção de um cubo

Quarto momento: colocou-se uma situação para os alunos como se fosse cobrir o quadro com esses quadradinhos de 5 cm quantos quadradinhos seriam necessários? Desenhar no quadro usando régua ou fita métrica o que isso significa um quadrado de 1 m x 1m. Colocar o quadradinho de 1cm^2 no quadro para verem que de 1 cm^2 cada. Total 10 000 quadradinhos ou 1m^2. Portanto, a área indica quantos quadradinhos de determinada unidade são precisos para preencher a figura.

Figura 9: Medindo o comprimento do quadrado

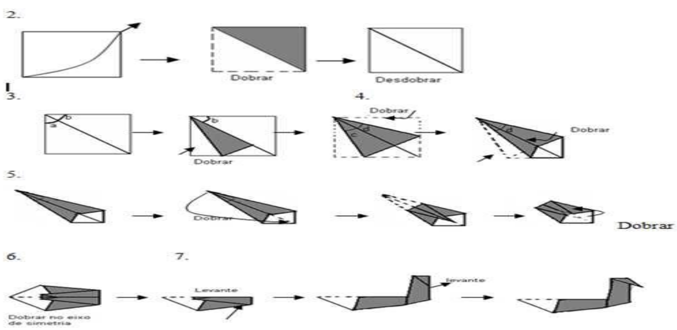
3.1.2 Atividade construção do cisne com origami (apêndice B)

Data: 31/08/2018

Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): construção do cisne com dobradura

Figura 10: Passo a passo da construção do cisne

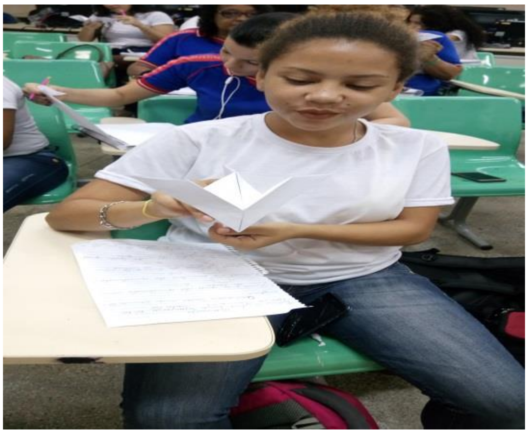


Passo a passo da aula: Essa proposta de ensino de geometria plana através de materiais concretos faz com que os alunos superem seu processo de ensino-aprendizagem no decorrer da atividade enquanto ele manipular a dobradura de papel foi dividido em momentos.

Primeiro momento: os alunos irão receber instruções de forma teórica e pratica de como proceder para realizar a dobra de alguns modelos. Na construção com dobradura da pomba da paz, na construção de um cisne. Cada aluno receberá certa quantidade de papel que já estarão cortados em formas de quadrados (21 cm x 21 cm) para a prática da dobradura. Serão abordados alguns tópicos como área do quadrado e lados. No triangulo, diagonal, bissetriz, ângulos.

Figura 11: Construção do cisne

Figura 12: Finalizando a construção do cisne



Segundo momento: O professor deve pedir que os alunos dobrem e desdobrem o quadrado em uma das diagonais e perguntar - Quanto triângulo formou? Como são os lados destes triângulos? Como são os ângulos Internos destes triângulos? Existe alguma coisa na natureza que possui esta forma? Existe alguma coisa em sua casa ou escola que tenha esta forma?

Terceiro momento: Ó professor deve pedir que os alunos marquem os ângulos: A e B e em seguida dobrando o papel indique as bissetrizes destes ângulos e perguntar: - Quantos triângulos nos temos agora? Como são os lados destes triângulos? Como são os ângulos internos destes triângulos?

Quarto momento: O professor deve pedir que os alunos marquem os ângulos, C e D e em seguida dobrando o papel indique as bissetrizes destes ângulos e perguntar: - Quantos triângulos têm agora? Eles são iguais aos anteriores? Por quê?

Quinto momento: O professor deve pedir que os alunos façam mais uma dobra e perguntar: - Que tipo de triângulos nós temos agora?

Figura 13: Instrução de dobradura do cisne

Sexto momento: O professor deve informar o que e eixo de simetria e pedir que os alunos dobrem a figura no seu eixo de simetria. Deve questionar a respeito de coisas no nosso dia-a-dia em que é possível observar a utilização do conceito de simetria.

Sétimo momento: Ao finalizar o professor deve informar para os alunos sobre a classificação dos triângulos que apareceram na dobradura do cisne levando em consideração as observações feitas por eles durante a execução do plano de ação.

Duvida dos alunos: os alunos não tiveram divida a respeito das dobraduras de papel ao fazer a cabeça do cisne e o corpo do cisne.

3.1.3 Atividade cartão fractal tridimensional (apêndice E)

Data: 01/10/2018

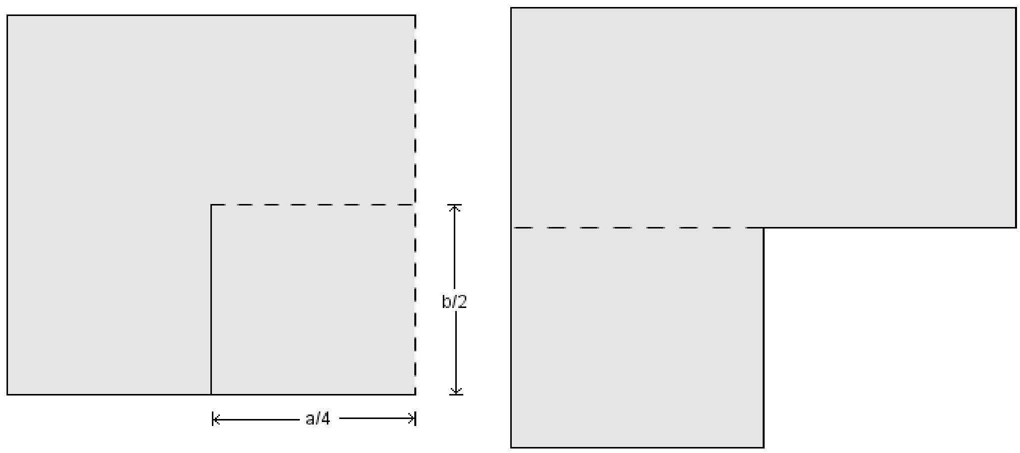
Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): Construção cartão fractal tridimensional

Passo a passo da aula: as aulas foram divididas passo a passo

1º Passo - Encontre a metade, tanto da parte horizontal como da vertical, da folha. Então recorte na horizontal até o ponto de encontro das duas retas e dobre para a esquerda.

Figura 14: Figura geométrica

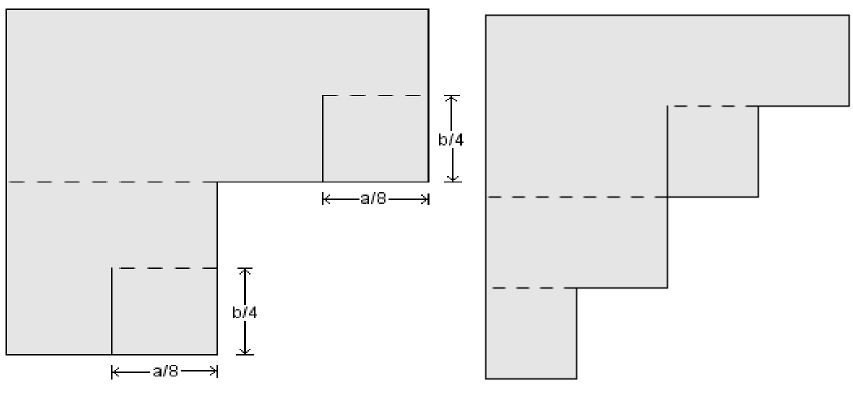


Fonte: Autor (2018)

2º Passo - Repita o mesmo processo com a parte de cima e de baixo do hexágono obtido.

Após a terceira interação, vamos ter algo assim:

Figura 15: Dobrando o papel



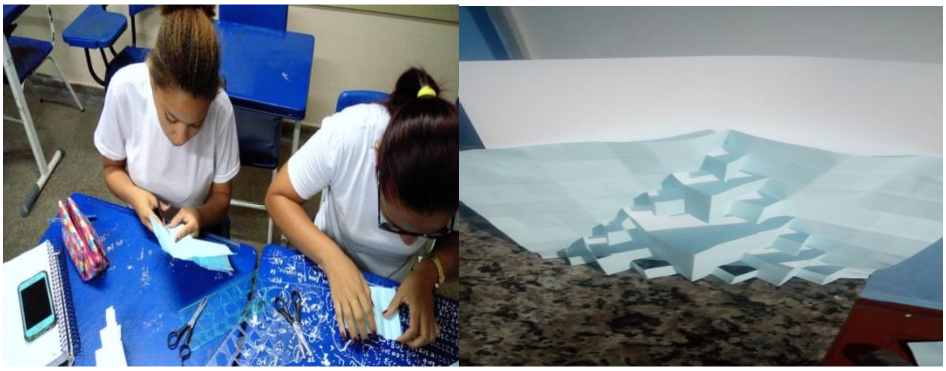
Fonte: Autor (2018)

3º passo - Com a folha dobrada ao meio faça dois cortes verticais simétricos $\frac{a}{2}$ uma distância (divididas em 4 partes iguais) das extremidades da folha, de altura (divididas em 2 partes iguais) como mostra na figura 6 (curva de Koch) .

Note que a = 2x $\frac{x}{4} = \frac{x}{2}$

4º passo Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda geração do cartão fractal.

Figura 16: Montagem do triangulo Sierpinski



Para obter mais gerações, repita o processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando o procedimento 2 e 3. No segundo momento da atividade, pode-se explorar a quantidade de segmentos que foram utilizadas em cada iteração.

Podemos observar que o cartão da Figura 17 possui estruturas auto-similares. Com o cartão pronto, observamos que as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras são paralelepípedos. Percebemos durante a construção que, a cada novo corte e dobradura, obtemos novos paralelepípedos. Se chamarmos de iteração zero, a primeira geração do cartão, quantos paralelepípedos novos surgem a cada iteração? Podemos exploras a construção do cartão construindo a tabela 1

Tabela 2: Iteração N Número de paralelepípedos novos

Interações	Numero de *paralelepípedos* novos
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
......	...
n	2^n

Note que a cada iteração, o número de novos paralelepípedos dobra, porém, em escala menor (paralelepípedos menores). Com isso, pudemos concluir que o processo de construção dos paralelepípedos em cada iteração é descrito pela lei de potência 2^n, onde n = 0, 1, 2, 3,... É o número das iterações. Identificamos que a cada nova iteração tem um paralelepípedo cercado por 2 novos paralelepípedos. Este valor será denominado fator multiplicador.

3.1.4 Atividade conjunto de cantor

Data: 03/10/2018

Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

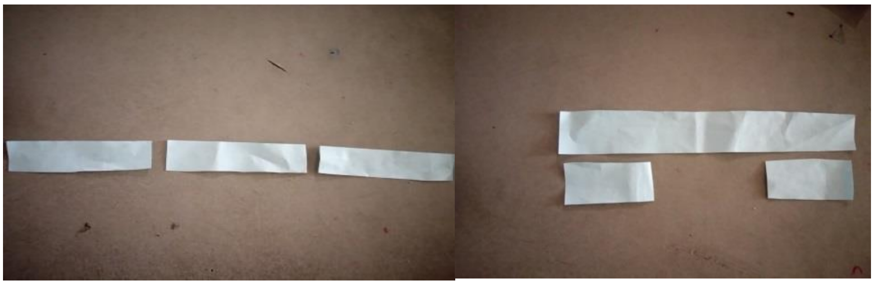
Conteúdo(s) abordado(s): Conjunto de Cantor

Passo a passo da aula: Os objetivos dessa atividade é que os alunos possam reconhecer uma sequência numérica, estimar a quantidade de segmentos em cada iteração, organizar dados em uma tabela, identificar a dimensão desse Fractal. Para construir esse Fractal, irá utilizar papel sulfite. Para o primeiro momento dessa atividade devem-se seguir os seguintes procedimentos:

1ª Cortar tiras de papel A4 colorido com o comprimento de 27 centímetros.

2ª Dobrar uma das tiras de forma que obtenha 3 tiras com o mesmo comprimento.

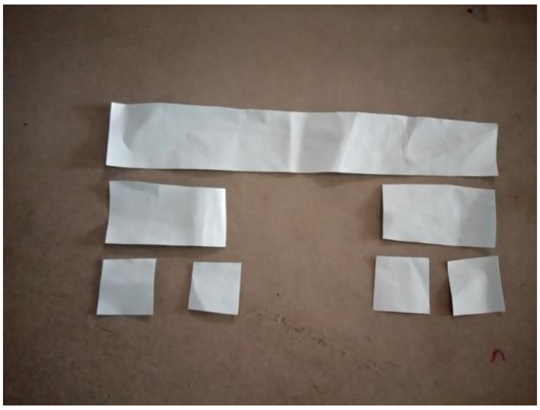
Figura 17: Recortem de tiras



3ª Eliminar a tira central, deixando apenas 2 dessas tiras, com 9 centímetros.

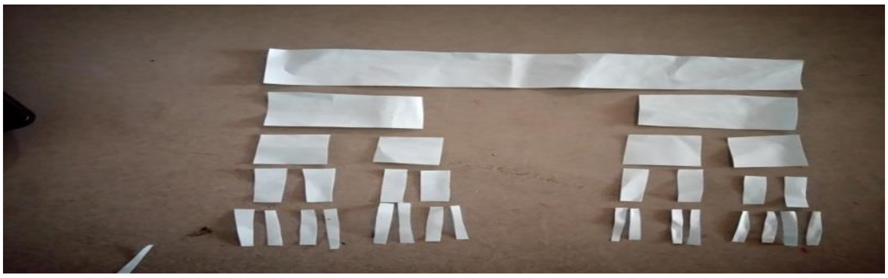
4ª A partir da tira dividida, repetir o mesmo procedimento 2 e 3 quantas vezes quiser.

Figura 18: Construção do conjunto de cantor




5ª Montar o Fractal em outra folha de papel sulfite de uma cor diferente da escolhida para fazer a construção.

Figura 19: Os cinco níveis da construção do Conjunto de Cantor



Para obter mais gerações, repita o processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando o procedimento 2 e 3. No segundo momento da atividade, pode-se explorar a quantidade de segmentos que foram utilizadas em cada iteração, construindo uma tabela como descrita abaixo.

Tabela 3: Quantidade de segmentos em cada iteração na construção do Conjunto de Cantor

Nível do fractal	Conjunto	Quantidade de Segmentos
0	27 cm	1
1	9 cm	$2^1 = 2$
2	3 cm	$2^2= 4$
3	1 cm	$2^3 = 8$
4	0,3	$2^4 =16$
......	....	....
N	N/3	2^n

No terceiro momento da atividade, o intuito ao terminar de montar a tabela é que os alunos descubram a lei de formação, como apresentada acima, ou seja, para o nível N, o número de segmentos a serem utilizados será 2^N. Dessa forma os alunos poderão identificar a partir da sequência numérica formada pela quantidade de segmentos {1, 2, 4, 8,..., 2N} que ela representa uma Progressão Geométrica, onde o primeiro termo é $a_1=1$ e a razão dada por a_2 / a_1, ou seja, $q= 2/1 = 2$. O termo geral da P.G. é $a1*q^{N-1}$, então teremos $a_N = 2*2^{N-1}$

No quarto momento dessa atividade o aluno deverá encontrar a dimensão desse Fractal, partindo do fundamento da dimensão Hausdorff.

Como o número de subpartes similares que se observa no lugar em uma determinada parte desse Fractal é 2, então p=2.

Os alunos poderão concluir que o Conjunto de Cantor possui uma dimensão que se situa entre 0 e 1.

3.1.5 Atividade curva de Koch (apêndice D)

Data: 04/10/2018

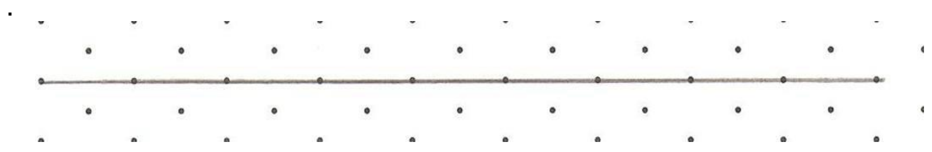
Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): Curva de Koch

Passo a passo da aula: Para facilitar a representação de formas geométricas no plano, podem-se utilizar três tipos de malha ou rede: a pontilhada, a quadriculada e a triangular. Utilize a rede triangular para construir a Curva de Koch, seguindo os procedimentos a seguir.

1. Desenhe um segmento de reta ligando 10 pontos de a rede triangular.

Figura 20: Segmento inicial da construção da Curva de Koch.

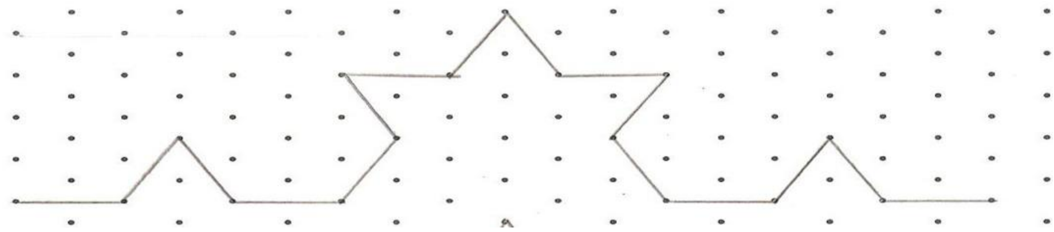


2. Divida-se o segmento em três segmentos iguais, substituindo-os por quatro congruentes, intermediário, por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (que seria sua base).

Figura 21: 2º Procedimento da construção da Curva de Koch

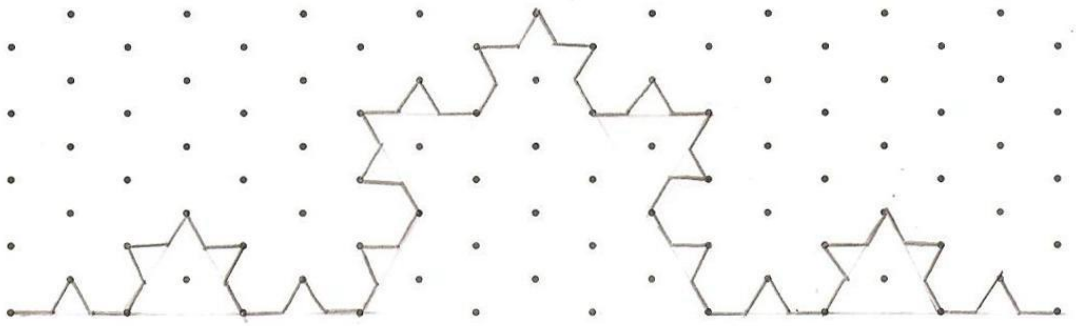
3. Substitua cada um dos segmentos originados seguindo a regra 2

Figura 22: 2º Procedimento da construção da Curva de Koch



4. Repita o procedimento 2 e 3 quantas vezes for possível.

Figura 23: 4ª Curva de Koch em sua 4ª iteração construída em rede triangular



No segundo momento da atividade pode-se obter a contagem de segmentos que são formados em cada nível, calcular o seu perímetro, montando assim uma tabela como essa abaixo:

Tabela 4: Quantidades de segmentos, comprimento e perímetro da Curva de Koch em cada iteração.

Nível	Nº de segmento	Comprimento	Perímetro
0	3	C	3 . c
1	3.4=12	c.$(\frac{1}{3})^1$	3. $(\frac{4}{3})$.c
2	$3.4^2=48$	C.$(\frac{1}{3})^2$	3 .$(\frac{4}{3})^2$. c
3	$3.4^3=192$	c.$(\frac{1}{3})^3$	3. $(\frac{4}{3})^3$. c
...	....	.....	......
N	3.4^n	c.$(\frac{1}{3})^n$	3 .$(\frac{4}{3})^n$. c

No terceiro momento o aluno poderá encontrar a dimensão da Curva de Koch lembrando que esse Fractal possui autossimilaridade estrita onde se observar qualquer nível de construção desse Fractal a outra parte observada assemelha a uma parte maior, ou ao Fractal inteiro.

3.2 Aplicações das atividades

3.2. 1 Primeira aula: figuras geométricas, perímetro e área. (apêndice A)

Data: 01/08/2018

Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): Figuras geométricas

Passo a passo da aula: A primeira aula com dobradura do cubo os alunos se mostraram interessados, acredita-se que seja pelo fato de ter mostrado para eles o cubo pronto, fazendo assim com que se interessassem pela forma de montá-lo. Antes de mostrar os passos para essa montagem, alguns alunos não acreditavam que o cubo era formado somente com dobraduras. A aula foi ministrada dentro do laboratório de informática por ter mais espaço a sala tinha em média 16 anos dentre homens e mulheres, e começou por desenhar no quadro com ajuda de uma régua e um lápis um quadrado, cada grupo desenho seu quadrado na medida em que os alunos iam se sentando o professor foi mostrando em seu cotidiano onde encontrar. Durante a apresentação foi citado situações como por exemplo:

A) Quando você vai a loja comprar cerâmica a vendedora pergunta quantos metros quadrados e quanto mede largura e comprimento do ambiente em que você vai assentar esse piso?

Essas situações do cotidiano motivaram os alunos e buscarem a entender a Geometria plana.

Figura 24: Construindo o cubo com dobraduras

Dúvida dos alunos: a dúvida dos alunos ficou na parte de como usar a geometria no dia a dia! Onde encontrar? Para que serve!

3.2.2 Segunda aula construção do cisne com origami (apêndice B)

Data: 31/08/2018

Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): construção do cisne com dobradura

Passo a passo da aula: a aula começa com a entrada dos alunos no laboratório de informática em media 14 alunos entre homens e mulheres e algumas crianças, durante a abordagem do conteúdo com dobradura de um cisne com origami, foram ensinadas o passo a passo da construção que foi dividida em momentos, cada momento da dobradura do cisne se formava um triangulo equilátero que naquele momento foi chamado de interação do cisne, nesse triângulo equilátero foi pedido que os alunos calculassem a área e o perímetro das interações em uma folha e apresentasse o resultado das interações (dobraduras) desses triângulos.

Figura 25: Construindo o cisne

Dúvidas dos alunos: a dúvida dos alunos ficou na construção do cisne, por ser algo novo para muitos alunos, a dobradura de papel foi algo que não viram em geometria e ainda existia certa adaptação com o conteúdo.

3.2.3 Terceira aula: Construção cartão fractal tridimensional (apêndice E)

Data: 31/ 08/ 2018

Serie/turma(s): A

Conteúdo(s) abordado(s): Cartão Fractal tridimensional

Passo a passo da aula: a aula foi ministrada para 16 alunos como se tratava de um conteúdo que eles ainda não tinham visto, foi feito (a) uma introdução da parte teórica e em seguida começou a construção do triângulo tridimensional. Foi feito(a) passo a passo explicando interação por interação ate que os alunos(a) finalizassem.

Figura 26: Triângulo de Sierpinski

Dúvidas dos alunos: por se tratar de algo novo, uma ideia nova, os alunos ficaram com dúvida na interação das dobraduras e nos cálculos de como chegar aos paralelepípedos, pois cada corte que era dado mais paralelepípedos apareciam.

3.2.4. Quarta aula conjunto de cantor

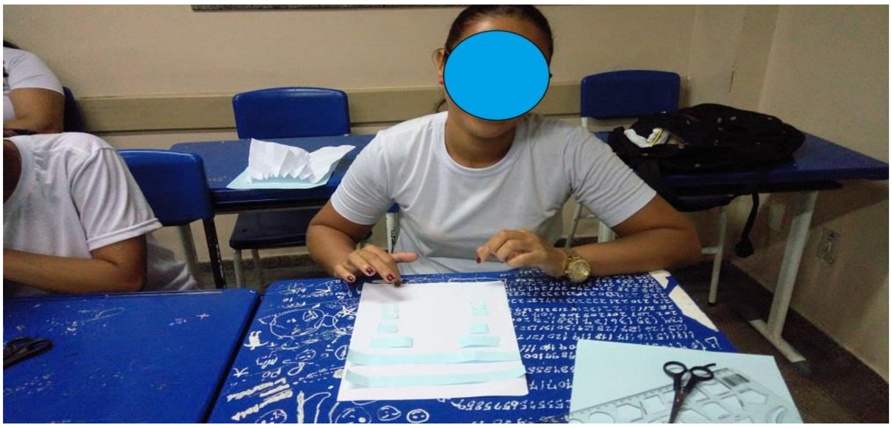
Data: 03/10/2018

Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): Conjunto de cantor

Passo a passo da aula: essa aula teve o intuito de estimular a ideia de sequência números mostra a quantidade de segmentos em cada iteração, organizar na tabela os dados, para a construção dessa fractal usou-se a ideia de ordenação de números, pois cada interação obtinha-se outra ordem mais na mesma figura.

Figura 27: Conjunto de cantor



Duvidas dos alunos: os alunos tiveram duvidas nas interações de corte do papel, pois cada corte o papel ia diminuindo cada vez mais.

3.2.5 Quinta aula Curva de Koch (apêndice d)

Data: 04/10/2018

Serie/turma(s): 9ªano (EJA) turma A

Conteúdo(s) abordado(s): Curva de Koch

Passo a passo da aula: durante a aula para facilitar a curva de Koch foi representa em formas geométricas no plana, utilizou-se um papel A4 e começou a pontilhar em linha reta varias pontinhos para que os alunos pudessem construir a curva de Koch assim a interação ia surgindo.

Figura 28: Construção da curva de Koch

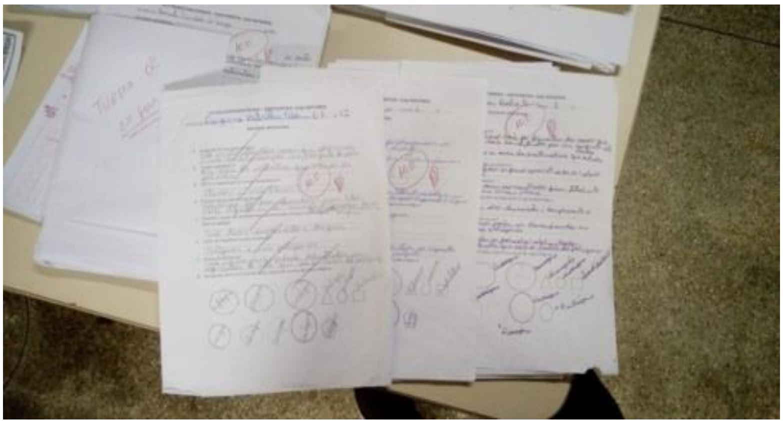
3.2.6Sexta aula: Questionário de contribuição das atividades (Apêndice F)

Após terem um contato com esses objetos e de descobrirem suas aplicações no cotidiano e a relação com diversos conteúdos matemáticos, os alunos se mostraram mais interessados e motivados com relação à matemática. Pois, o estudo dos fractais faz-se interessante como uma forma mais precisa de representação do nosso mundo, permitindo trabalhar a matemática de uma maneira mais instigante, e assim despertar a curiosidade e estimular a criatividade dos alunos.

O objetivo dessas atividades é proporcionar aos alunos uma aula diferenciada e dinâmica motivando-os a querer estudar geometria e melhorar seu desempenho nas aulas de matemática através de materiais concretos. Diante deste contexto, este trabalho propôs a utilização do origami como recurso didático nas aulas de Matemática, principalmente no estudo da geometria, onde através desta arte, oportuniza-se ao aluno construir ou resgatar conceitos já estudados de forma lúdica e criativa a primeira questão (apêndice G)

Os alunos gostaram da forma como foram trabalhadas as dobraduras que finalizou com a construção de um cisne. Quanto às falhas, alguns alunos (questão 2) não notaram falhas, pois se tratava de algo lúdico e concreto de fácil compreensão. Quanto à questão 3 durante a abordagem da aula, os alunos puderam notar que a geometria fractal e só uma extensão da geometria plana e puderam nota a similaridade com seus cotidianos. Quanto à questão 4 quando perguntado se poderia ensinar geometria fractal em sala de aula muitos alunos questionaram, pois a geometria habitual na qual estão empenhados já é suficiente. As questões 5 e 6 os alunos não concordaram muito sobre o ensino de geometria fractal em sala de aula, pois a realidade de muitos fica só na geometria euclidiana.

Figura 29: Avaliação geométrica

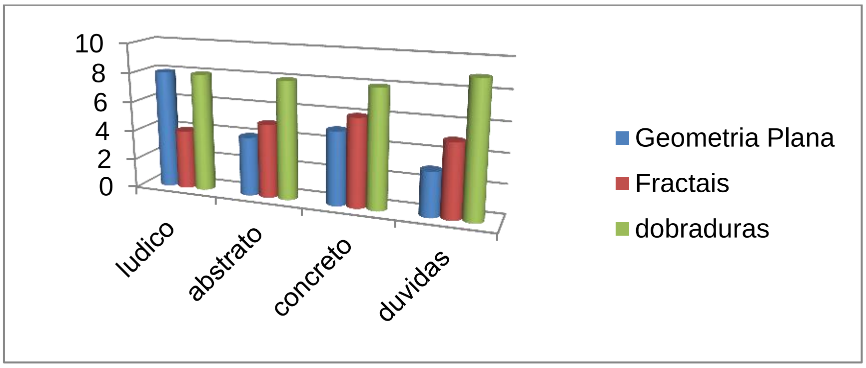


3.2.7 A análise dos questionários e avaliações (Apêndice D, E, F).

Verificou-se a partir das análises das respostas, que a maioria dos alunos que responderam ao questionário vem para a escola após um dia de trabalho, com relação ao domínio dos conhecimentos geométricos na análise das respostas observou-se nas questões que a figura era construídas facilitou a compreensão com material concreto.

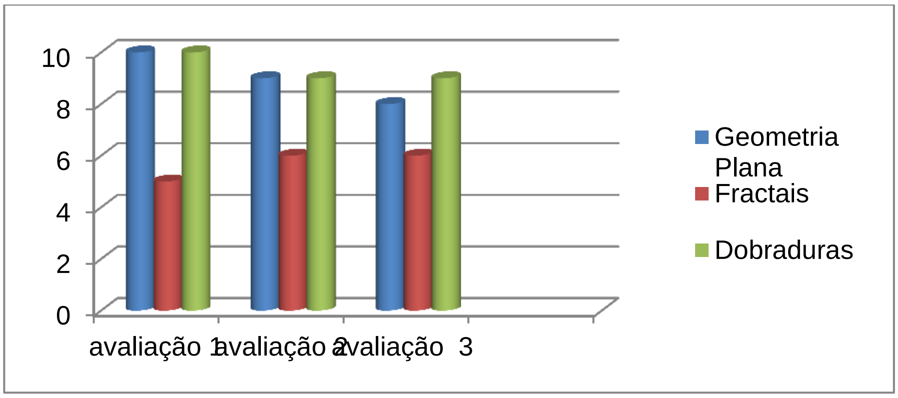
Durante as construções, o fator mais relevante observado foi à dificuldade dos alunos nas construções geométricas, principalmente no manuseio da régua e tesoura. Pois nesta etapa as construções foram realizadas manualmente. No decorrer da construção foi-se respondendo os questionários (apêndice D, E, F).

Figura 30: Questionário de aprendizagem dos alunos



Fonte: autor (2018)

Figura 31: Notas dos alunos com a avaliação de aprendizagem



Fonte: autor (2018)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração deste trabalho foi uma experiência muito enriquecedora tanto em nível de cultura geral como em nível de conhecimento matemático. O fato de este tema ser desconhecido para algumas pessoas parecia ser pouco interessante, mas à medida que fui compreendendo os vários conceitos nele envolvidos e sendo capaz de sintetizá-los e apresentar de forma ordenada, a curiosidade sobre a geometria fractal cresceu exponencialmente. Para isso muito contribuiu o constatar que a geometria fractal esta presente em todos os lugares (sobretudo em objetos e em seres naturais) de formas tão complexas e por vezes tão bonitas podendo sem criadas, ou simuladas, por processos matemáticos muito simples. Este trabalho pode proporcionar aos alunos um estudo diferenciado do convencional da matemática, onde puderam perceber que neste outro universo da matemática, ela não é estudada somente com a resolução de algoritmos e fórmulas envolvendo números, pode ser também estudada de uma forma lúdica, com dobradura de papel de forma a ser interessante, interativa, tornando o ensino da matemática mais significativo para eles. Assim os alunos passam a enxergar o óbvio, que não é tão óbvio assim, o aprendizado se torna mais rico e completo, na mesma proporção em que os conteúdos passam a ter outros significados para os alunos.

O trabalho com exercícios de Geometria Fractal demonstram de forma inequívoca, que pode tornar o aprendizado de alguns temas da Matemática curricular muito mais proveitosos. Ao se “reinventar”, a partir dos Fractais, a Matemática mostra aos alunos existir muitas coisas entre a lousa e a sua percepção de mundo, às vezes reduzida, em razão de que aquilo que a compõe, vai muito além dos números, das retas, dos pontos e planos, se encontrando em quase todos os lugares em nossa vida cotidiana, principalmente na natureza. Quando os alunos começam a “enxergar” esse óbvio, as resistências ao aprendizado da matemática são minimizadas pela criação ou pela reflexão de pontos de seu universo imagético, de sua realidade cotidiana, com pontos da realidade da Matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 16/03/2018

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997 p 142.

DANTE, L. R. **Matemática Ensino Médio**: volume único. 1. Ed. São Paulo: Ática 2005.

EVES, H. História da Geometria. Tradução de Higino H. Domingues. Tópicos de história da Matemática para o uso em sala de aula. São Paulo: Atual 1992

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Howard Eves, tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

MANDELBROT, Benoit. **La Recherche**, França, V.5 pp. 10 - 27 mar. 1986.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria fractal e aplicações.** 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Cidade do Porto, 2006. Disponível em: < http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> Acesso em: 10/10/2018

Apêndice A: Plano de aula 1

TEMA: Uma proposta de geometria Fractal pro 9ª ano do ensino fundamental

1. Escola – Cite Gilberto Mestrinho

2. Classe: 9º ano do Ensino Fundamental

3. Período: noturno

4. Assunto: geometria plana.

5. Duração: 4 aulas (200 minutos)

6. Objetivo: compreender a semelhança em diversos contextos, motivar o interesse dos alunos pelo estudo da Geometria despertando sua curiosidade através de uma didática diferenciada com a utilização da lista de exercícios.

7. Conteúdo:

7.1 Perímetro e Área.

8. Recursos, caderno, quadro e pincel papel A4,tesoura e régua.

9. **Procedimentos**: reconhecer a semelhança entre figuras plana a partir da congruência das medidas angulares e da proporcionalidade entre as medidas lineares de lados de ângulos, onde serão divididos em momentos:

Primeiro momento: será iniciado com a narrativa sobre a história da geometria. Conceitos da geometria plana, abordando, especificamente, as propriedades de alguns polígonos, seus elementos como: lados, vértices, diagonais, e suas nomenclaturas de alguns polígonos.

Segundo momento: discutir com alunos situações do cotidiano que envolve conceito de área como:

a) Quando você vai a loja comprar cerâmica na loja para assentar um piso. Vendedor pergunta quantos metros quadrados ou quanto mede largura e comprimento do ambiente.

b) Quando você vai a uma loja de construção pra fazer orçamento de quantos tijolos pra construir um muro ou uma parede para sua casa, vendedor pergunta quanto mede comprimento e altura do muro ou da parede.

Terceiro momento: Recortar um quadrado de 5 cm x 5 cm mostrando as características dessa figura (lados de mesma medida e ângulos retos) e mostrando na régua para os alunos que cada lado do quadrado possui 5 cm. E que a área no quadrado é dada pela multiplicação das 2 medidas. 5 cm^2.

Quarto momento: colocar uma situação se fosse cobrir o quadro com esses quadradinhos de 5 cm quantos quadradinhos seriam necessários? Desenhar no quadro usando fita métrica o que isso significa um quadrado de 1 m x 1m. Colocar o quadradinho de 1cm^2 no quadro para verem que 1cm^2 cada. Portanto, a área indica quantos quadradinhos de determinada unidade são precisos para preencher a figura.

Apêndice B: Plano de aula 2

TEMA: uma proposta de geometria fractal pro 9ª ano do ensino fundamental

1. Escola – Cite Gilberto Mestrinho

2. Classe: 9º ano do Ensino Fundamental

3. Participantes: alunos do 9ª ano (eja)

4. Período: noturno

5. Assunto: geometria dos origamis

6. Duração: 4 aulas (200 minutos)

7. Objetivo: O objetivo é proporcionar aos alunos uma aula diferenciada e dinâmica motivando-os a querer estudar geometria e melhorar seu desempenho nas aulas de matemática. Trabalhar com geometria plana através de materiais concretos com origami, fazendo com que o aluno supere seu processo de ensino-aprendizagem no decorrer da atividade enquanto ele manipular a dobradura de papel.

8. Conteúdo: serão abordados conceitos geométricos com ângulo, diagonal, bissetriz e eixo de simetria de um quadrado e de um triângulo.

8.1 criações de algumas figuras com o origami.

9. Recursos, folha A4, quadro e pincel, tesoura.

10. Procedimentos: O uso do Origami durante a aula se mostra eficaz, no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem, proponho a realizar esta aula em momentos.

Primeiro momento: os alunos irão receber instruções de forma teórica e pratica de como proceder para realizar a dobra de alguns modelos. Na construção com dobradura da pomba da paz, na construção de um cisne. Cada aluno receberá certa quantidade de papel que já estarão cortados em formas de quadrados (21 cm x 21 cm) para a prática da dobradura. Serão abordados alguns tópicos como área do quadrado e lados. No triângulo, diagonal, bissetriz, ângulos.

Segundo momento: O professor deve pedir que os alunos dobrem e desdobrem o quadrado em uma das diagonais e perguntar - Quanto triângulo formou? Como são os lados destes triângulos? Como são os ângulos Internos destes triângulos? Existe alguma coisa na natureza que possui esta forma? Existe alguma coisa em sua casa ou escola que tenha esta forma?

Terceiro momento: Ó professor deve pedir que os alunos marquem os ângulos: A e B e em seguida dobrando o papel indique as bissetrizes destes ângulos e perguntar: - Quanto triângulo nos tem agora? Como são os lados destes triângulos? Como são os ângulos internos destes triângulos?

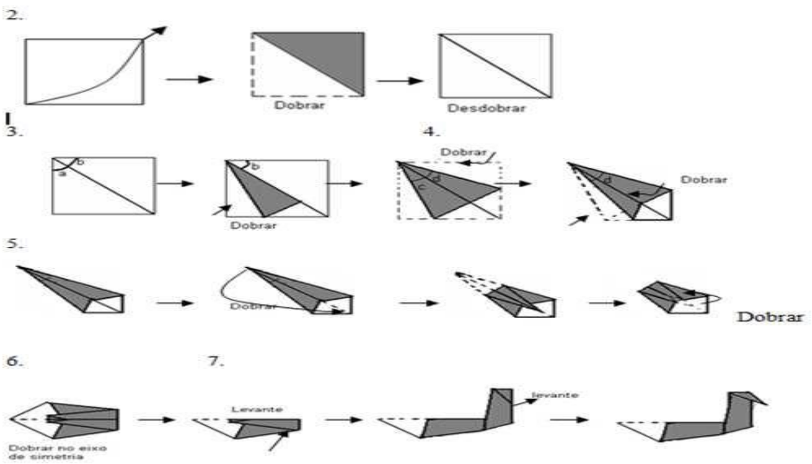
Quarto momento: O professor deve pedir que os alunos marcassem os ângulos, C e D e em seguida dobrando o papel indique as bissetrizes destes ângulos e perguntar: - Quantos triângulos têm agora? Eles são iguais aos anteriores? Por quê?

Quinto momento: O professor deve pedir que o aluno faça mais uma dobra e perguntar: - Que tipo de triângulos nós temos agora?

Sexto momento: O professor deve informar o que e eixo de simetria e pedir que os alunos dobrem a figura no seu eixo de simetria. Deve questionar a respeito de coisas no nosso dia-a-dia em que é possível observar a utilização do conceito de simetria.

Sétimo momento: Ao finalizar o professor deve informar para os alunos sobre a classificação dos triângulos que apareceram na dobradura do cisne levando em consideração as observações feitas por eles durante a execução do plano de ação.

Oitavo momento: O professor pode propor que os alunos tentem fazer um origami onde aparecem alguns tipos de triângulos.



Dobradura do cisne

Apêndice C: Plano de aula 3

TEMA: Uma proposta de geometria fractal pro 9ª ano do ensino fundamental

1. Escola – Cite Gilberto Mestrinho

2. Classe: 9º ano do Ensino Fundamental

3. Período: noturno

4. Assunto: geometria de Fractais

5. Duração: 1 aula (50 minutos)

6. Objetivo: Motivar o interesse dos alunos pelo estudo da Geometria fractal, despertando sua curiosidade através de uma dobradura de papel usando na construção de alguns fractais.

7. Conteúdo:

7.1 Fractais Geométricos.

8. Recursos, folha de papal A4, quadro e pincel e tesoura.

9. Procedimentos: por meio de interações os alunos irão resolver atividades (apêndice D e E) que serão divididas em 2 momentos:

Primeiro momento: mostra aos alunos a parte teórica de construção das figuras fractais e resolução das atividades.

Segundo momento: será pedido para que os alunos construam alguns Fractais como o TRIÂNGULO DE SIERPINSK e a curva de Koch (flocos de neve) até a quarta iteração, fazendo iteração por iteração, e logo, em seguida, serão mostrados para eles à solução.

Apêndice D: ATIVIDADE 1 – CURVA DE KOCH

Escola: ____
Ano: ______ Turma: _____ Data: ___ / ___ / _____
Aluno (a): ____

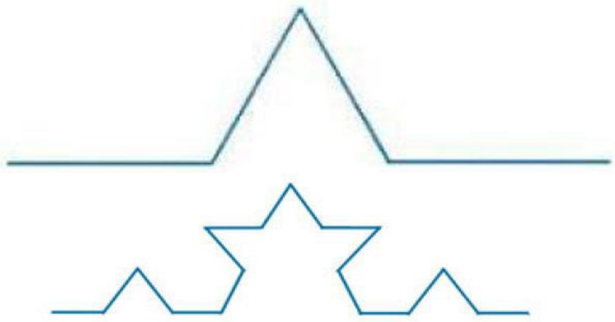
Instruções para construção da curva de Koch:

1-considerar um segmento de reta;
2-dividir o segmento em 3 partes iguais, substituir o segmento central por um triângulo equilátero sem base;
3-repetir cada um dos passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura.

Nível 0 (zero) →
Nível 1 →
Nível 2 →

Considerando que o comprimento inicial da curva de Koch seja 1 (uma unidade),

NIVEL 0 ZERO ____



NIVEL	Nº DE SEGUIMENTO	COMPRIMENTO DE CADA SEGIMENTO	COMPRIMENTO TOTAL DE CURVA
0			
1			
2			
3			
...			
N			

a) A sequência dos valores da coluna “comprimento de cada segmento”

b) A sequência dos valores da coluna “comprimento total da curva”

Apêndice E: ATIVIDADE 2 – TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Escola: ____

Ano: ______ Turma: _____ Data: ___ / ___ / _____

Aluno (a): ____

Processo de construção do triângulo de Sierpinski:

Passo 1→ Considerar inicialmente um triângulo equilátero;

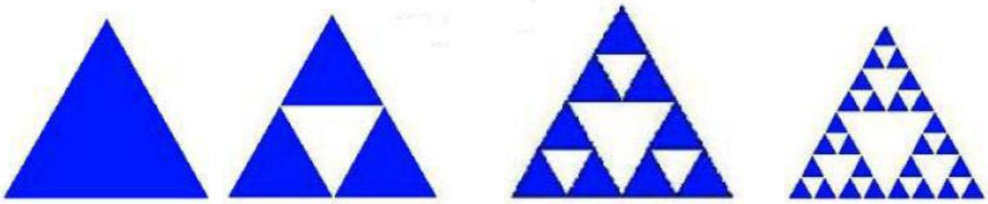
Passo 2→ Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;

Passo 3→ Remover o triângulo central;

Passo 4→ Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;

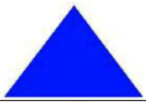
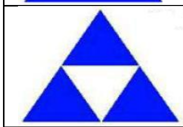
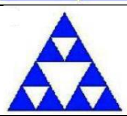
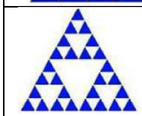
Passo 5→ repetir o passo 4 sucessivamente.

Observe as seguintes figuras e seus níveis respectivos:



Nível 0 nível 1 nível 2 nível 3

PARTE 1: Considerando inicialmente um triângulo equilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do "Triângulo de Sierpinski".

	Nível	Numero de triangulo	Comprimento do lado de cada triangula	Perímetro de cada triangula	Perímetro total
					
					
					
					
....					
	n				

Apêndice F: Questionário sobre contribuição das atividades sobre fractais

Escreva as respostas clara e objetiva:

1- Durante algumas aulas adotamos o trabalho de construir com dobradura de papel usando a geometria para o conteúdos de Matemática. Essa metodologia foi significativa para o seu aprendizado? Comente.

2- As aulas práticas através de dobradura de papel tiveram algumas falhas? Descreva-as e comente:

3- Citem aspectos positivos desse trabalho com fractais comparando-o as atividades que já estavam habituados (a).

4- No seu ponto de vista e possível trabalhar o ensino de fractais no 9º ano do ensino fundamental? Explique.

5- Em sua opinião e possível trabalhar explorando esse conteúdo em sala de aula?

6- esse trabalho proporcionou um ensino de qualidade?

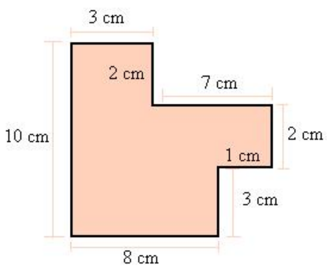
Anexo A: lista de exercícios de área e perímetro

PERÍMETRO:

Perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados desse polígono.

Para calcular o perímetro de um polígono, devemos usar a mesma unidade de medida para todos os seus lados.

Exemplo1: Determine o perímetro da figura abaixo:



Sol.:
P = 10 cm + 3 cm + 2 cm + 7 cm + 2 cm + 1 cm + 3 cm + 8 cm
P = 36 cm

Exemplo 2 Quanto mede o lado de um octógono equilátero cujo perímetro é igual a 120 cm?

Sol: Um octógono **equilátero** possui todas as suas medidas iguais, e chamemos de **x** a medida de um dos lados do octógono, então temos:

$$P = x + x + x + x + x + x + x + x$$

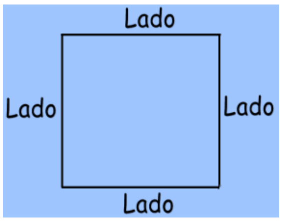
$$120 = 8x$$

$$x = \frac{120}{8}$$

$$x = 15cm$$

* **ÁREA DO QUADRADO**

Área do quadrado = medida do lado. Medida do lado ➔ A = ℓ^2

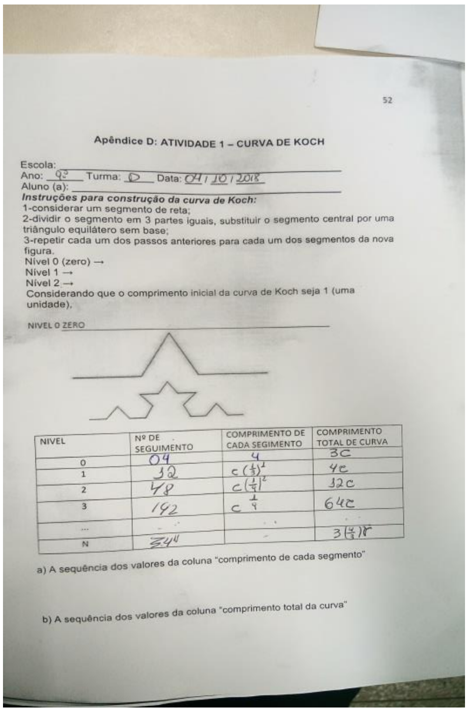


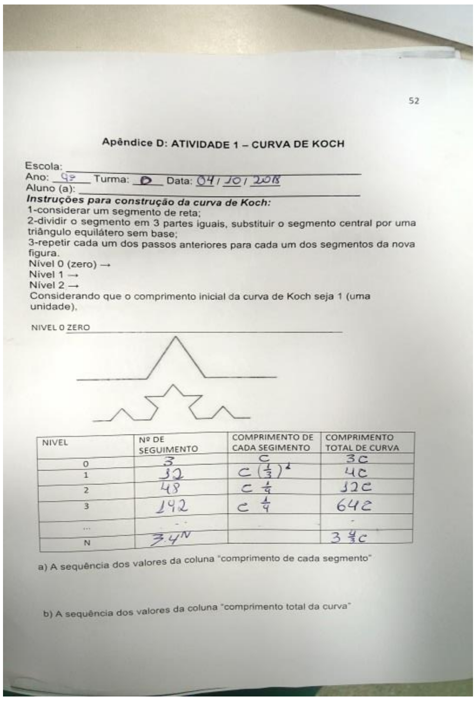
Exemplo 3: Calcule a área de um terreno quadrado com 41,6 m de lado.

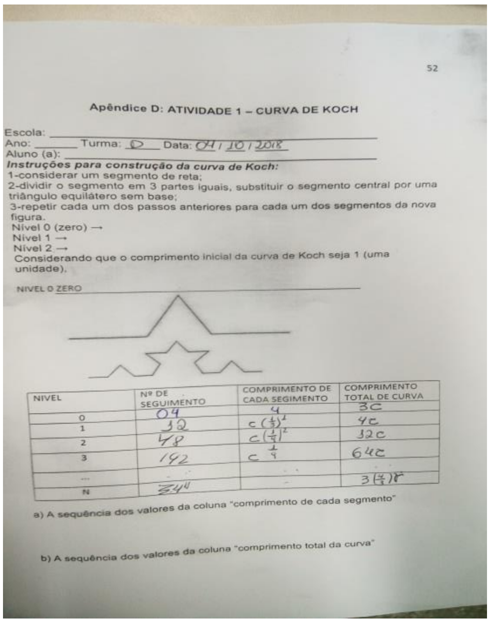
Sol: A = l.
A = 41,6 x 41,6

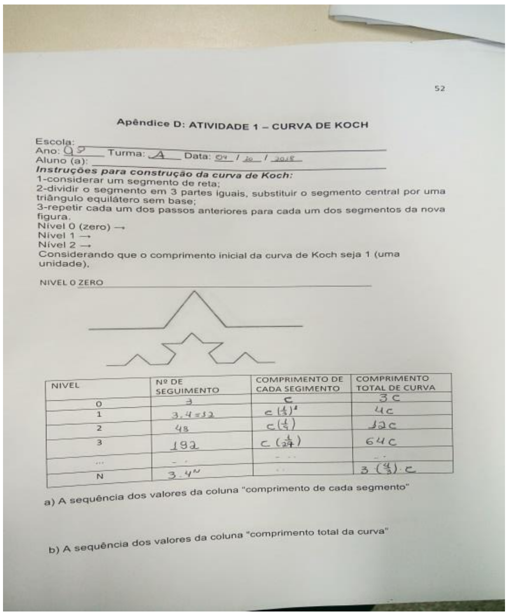
A = 1 730,56 m^2

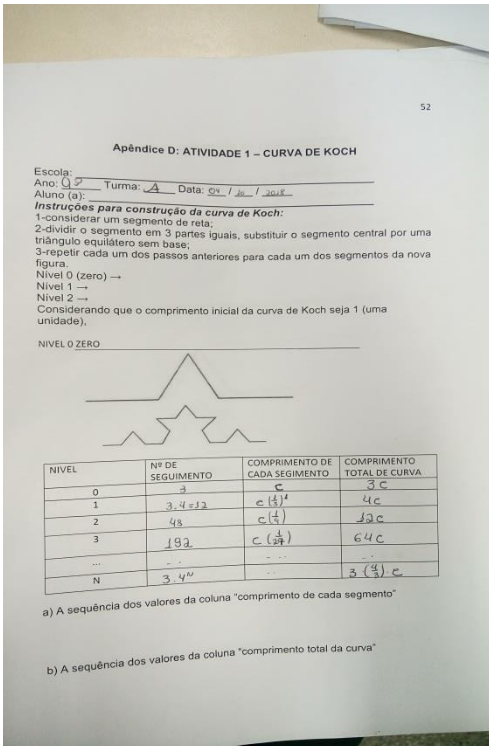
Anexo B: Atividade desenvolvida pelos alunos











52

Apêndice D: ATIVIDADE 1 – CURVA DE KOCH

Escola:
Ano: 9º Turma: A Data: 04 / 10 / 2018
Aluno (a):

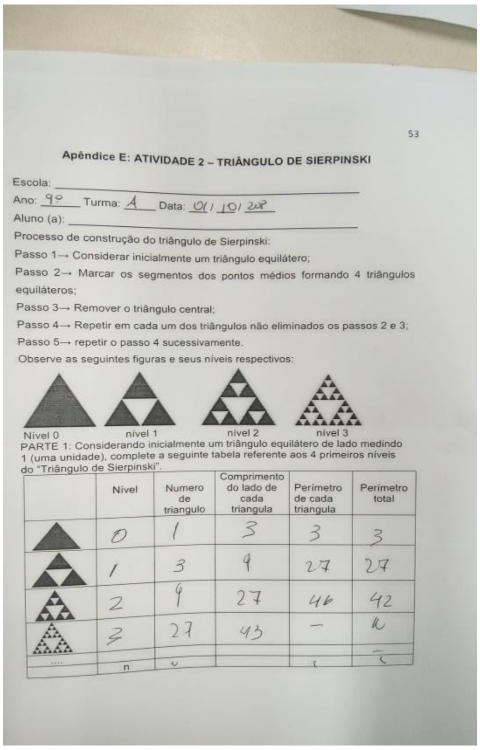
Instruções para construção da curva de Koch:
1-considerar um segmento de reta;
2-dividir o segmento em 3 partes iguais, substituir o segmento central por uma triângulo equilátero sem base;
3-repetir cada um dos passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura.
Nível 0 (zero) →
Nível 1 →
Nível 2 →
Considerando que o comprimento inicial da curva de Koch seja 1 (uma unidade),

NIVEL 0 ZERO

NIVEL	Nº DE SEGUIMENTO	COMPRIMENTO DE CADA SEGIMENTO	COMPRIMENTO TOTAL DE CURVA
0	3	c	3c
1	3.4=12	$c\left(\frac{1}{3}\right)^1$	4c
2	48	$c\left(\frac{1}{9}\right)$	12c
3	192	$c\left(\frac{1}{27}\right)$	64c
...	...	...	...
N	3.4^N	..	$3\left(\frac{4}{3}\right)\cdot c$

a) A sequência dos valores da coluna "comprimento de cada segmento"

b) A sequência dos valores da coluna "comprimento total da curva"



53

Apêndice E: ATIVIDADE 2 – TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

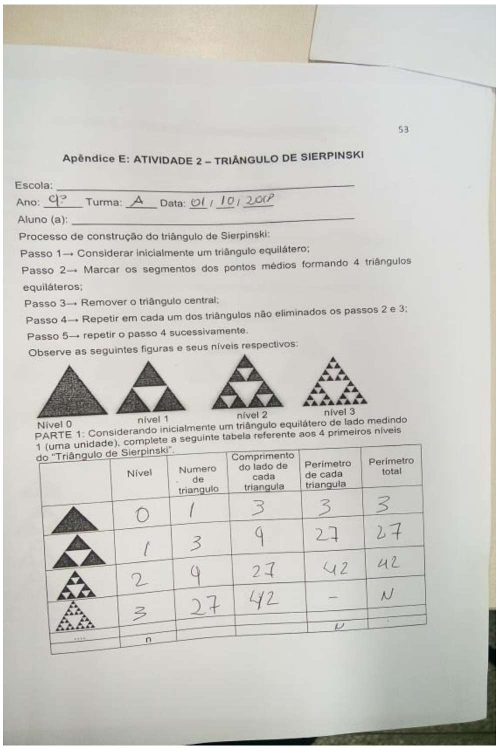
Escola:
Ano: 9º Turma: A Data: 01/10/2018
Aluno (a):

Processo de construção do triângulo de Sierpinski:
Passo 1→ Considerar inicialmente um triângulo equilátero;
Passo 2→ Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;
Passo 3→ Remover o triângulo central;
Passo 4→ Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;
Passo 5→ repetir o passo 4 sucessivamente.
Observe as seguintes figuras e seus níveis respectivos:

Nível 0 nível 1 nível 2 nível 3

PARTE 1: Considerando inicialmente um triângulo equilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do "Triângulo de Sierpinski".

	Nível	Numero de triangulo	Comprimento do lado de cada triangula	Perímetro de cada triangula	Perímetro total
	0	1	3	3	3
	1	3	9	27	27
	2	9	27	46	42
	3	27	43	–	n
....	n				



53

Apêndice E: ATIVIDADE 2 – TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

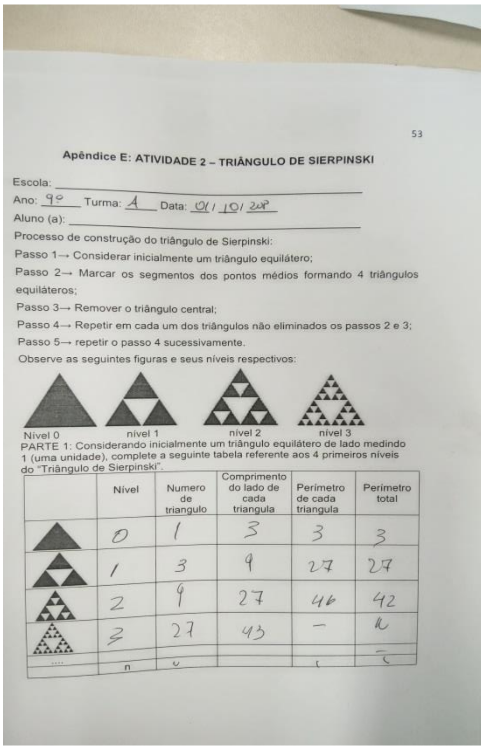
Escola:
Ano: 9º Turma: A Data: 01/10/2018
Aluno (a):

Processo de construção do triângulo de Sierpinski:
Passo 1→ Considerar inicialmente um triângulo equilátero;
Passo 2→ Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;
Passo 3→ Remover o triângulo central;
Passo 4→ Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;
Passo 5→ repetir o passo 4 sucessivamente.
Observe as seguintes figuras e seus níveis respectivos:

Nível 0 nível 1 nível 2 nível 3

PARTE 1: Considerando inicialmente um triângulo equilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do "Triângulo de Sierpinski".

	Nível	Numero de triangulo	Comprimento do lado de cada triangula	Perímetro de cada triangula	Perímetro total
	0	1	3	3	3
	1	3	9	27	27
	2	9	27	42	42
	3	27	42	–	N
				N	
....	n				



53

Apêndice E: ATIVIDADE 2 – TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

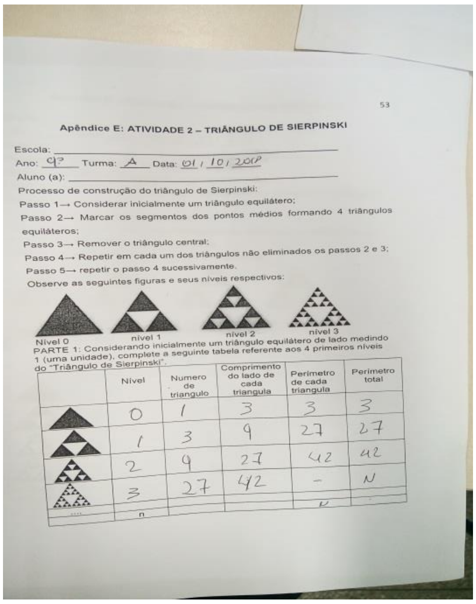
Escola:
Ano: 9º Turma: A Data: 01/10/2018
Aluno (a):

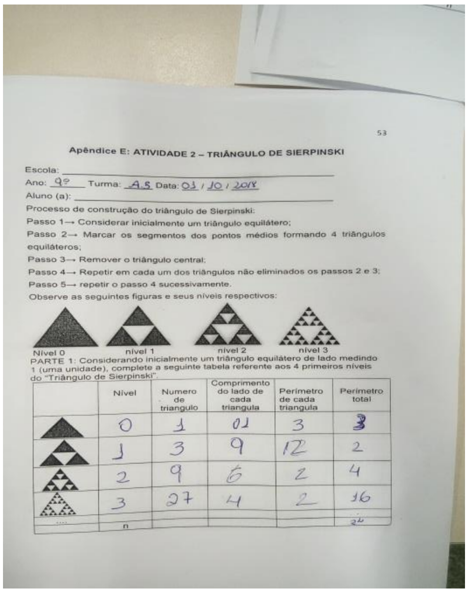
Processo de construção do triângulo de Sierpinski:
Passo 1→ Considerar inicialmente um triângulo equilátero;
Passo 2→ Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;
Passo 3→ Remover o triângulo central;
Passo 4→ Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;
Passo 5→ repetir o passo 4 sucessivamente.
Observe as seguintes figuras e seus níveis respectivos:

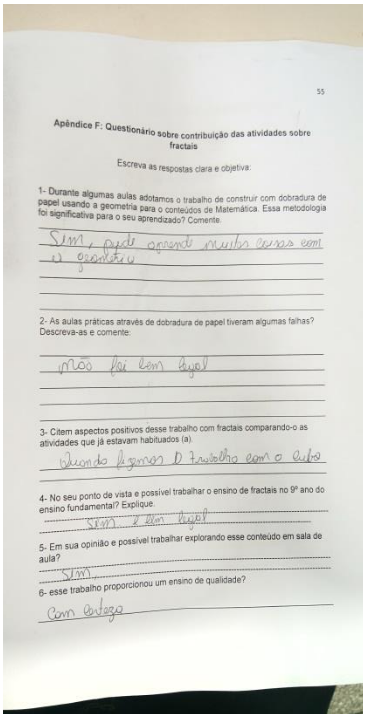
Nível 0 nível 1 nível 2 nível 3

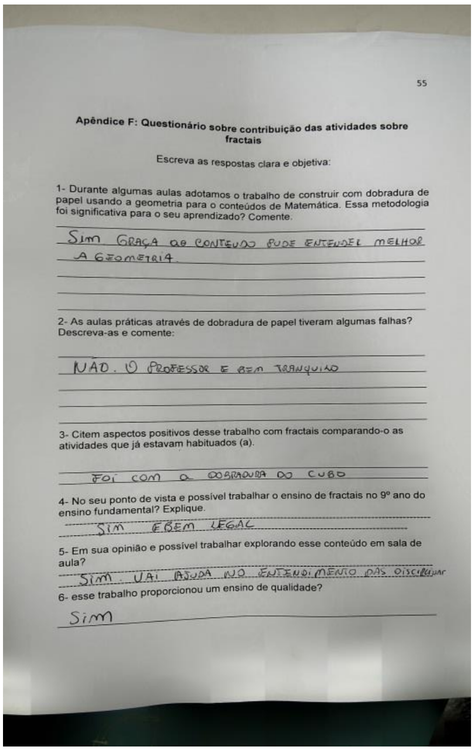
PARTE 1: Considerando inicialmente um triângulo equilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do "Triângulo de Sierpinski".

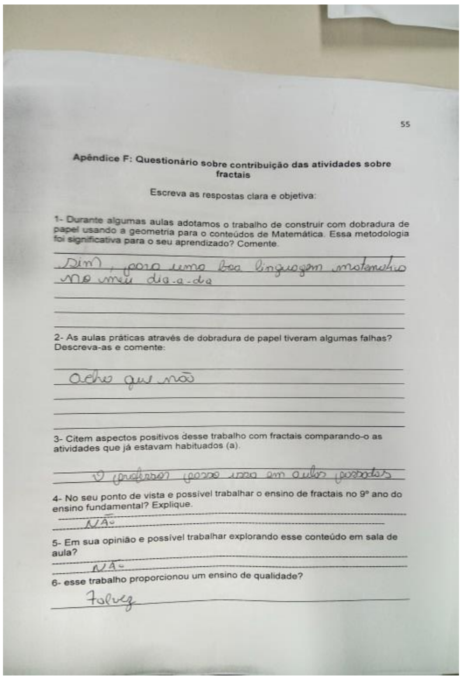
	Nível	Numero de triangulo	Comprimento do lado de cada triangula	Perímetro de cada triangula	Perímetro total
	0	1	3	3	3
	1	3	9	27	27
	2	9	27	46	42
	3	27	43	–	n
....	n				











55

Apêndice F: Questionário sobre contribuição das atividades sobre fractais

Escreva as respostas clara e objetiva:

1- Durante algumas aulas adotamos o trabalho de construir com dobradura de papel usando a geometria para o conteúdos de Matemática. Essa metodologia foi significativa para o seu aprendizado? Comente.

Sim, para uma boa linguagem matematica no meu dia-a-dia

2- As aulas práticas através de dobradura de papel tiveram algumas falhas? Descreva-as e comente:

Acho que não

3- Citem aspectos positivos desse trabalho com fractais comparando-o as atividades que já estavam habituados (a).

O professor passo isso em aulas passadas

4- No seu ponto de vista e possivel trabalhar o ensino de fractais no 9º ano do ensino fundamental? Explique.

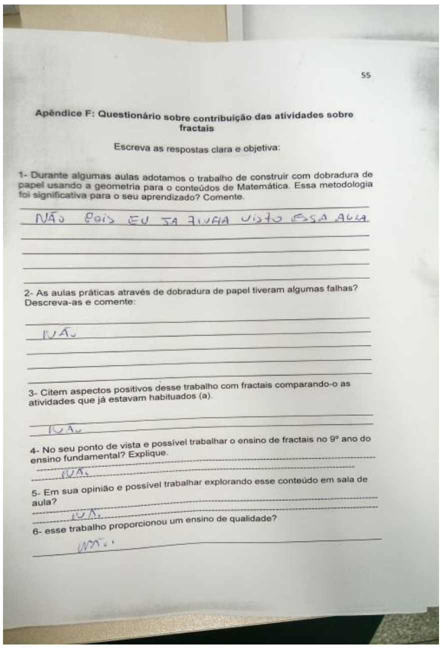
NÃO

5- Em sua opinião e possível trabalhar explorando esse conteúdo em sala de aula?

NÃO

6- esse trabalho proporcionou um ensino de qualidade?

Talvez



55

Apêndice F: Questionário sobre contribuição das atividades sobre fractais

Escreva as respostas clara e objetiva:

1- Durante algumas aulas adotamos o trabalho de construir com dobradura de papel usando a geometria para o conteúdos de Matemática. Essa metodologia foi significativa para o seu aprendizado? Comente.

NÃO POIS EU JA TINHA VISTO ESSA AULA

2- As aulas práticas através de dobradura de papel tiveram algumas falhas? Descreva-as e comente:

NÃO

3- Citem aspectos positivos desse trabalho com fractais comparando-o as atividades que já estavam habituados (a).

NÃO

4- No seu ponto de vista e possivel trabalhar o ensino de fractais no 9º ano do ensino fundamental? Explique.

NÃO

5- Em sua opinião e possível trabalhar explorando esse conteúdo em sala de aula?

NÃO

6- esse trabalho proporcionou um ensino de qualidade?

NÃO