**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS**

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Charles Jennings da Silveira Soares**


# PROVAS BIJETIVAS DE IDENTIDADES EM PARTIÇÕES


**MANAUS, 2018**

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# PROVAS BIJETIVAS DE IDENTIDADES EM PARTIÇÕES

**Charles Jennings da Silveira Soares**

*Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.*

Orientador(a): Dr. Almir Cunha da Graça Neto

**MANAUS, 2018**

GOVERNO DO ESTADO DO
**AMAZONAS**

# ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **CHARLES JENNINGS DA SILVEIRA SOARES**.

**Aos 27 dias do mês de novembro de 2018**, às 21:19 horas, em sessão pública na Sala Nivaldo Santiago da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pelo professor da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Dr. ALMIR CUNHA DA GRAÇA NETO, DR. KELVIN SOUZA DE OLIVEIRA e MSC. EDSON LOPES DE SOUZA** o aluno **CHARLES JENNINGS DA SILVEIRA SOARES** apresentou o Trabalho: **"Provas bijetivas de identidades em partições."** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,8 à monografia divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Helisangela Ramos da Costa
Presidente da Banca Examinadora

Almir Neto
Orientador (a)

Kelvin Souza de Oliveira
Avaliador 1

Edson Lopes de Souza
Avaliador 2

Charles Jennings da S. Soares
Aluno

(Fazer em duas vias, uma deve ser digitalizada para ser anexada ao TCC entregue em CD e outra deve ser entregue na Sec. Coordenação do Curso)

**DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, Paulo e Nilma, tia Lala, minha irmã Bruna e minha principal incentivadora na realização desse sonho: minha namorada Izabelle.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que sempre busquei força para nunca desistir desse sonho, ao meu orientador Dr. Almir Neto que me acolheu como seu orientando e acreditou no meu trabalho e potencial e a professora da disciplina TCC Helisângela que sempre esteve à disposição dos alunos para sanar toda e qualquer dúvida

## LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Consideremos o seguinte problema: de quantas maneiras podemos expressar o número 5 como a soma de inteiros positivos sem que a ordem das parcelas importe? 5=5, 5 = 4+1, 5 =3+2, 5 =3+1+1, 5 =2+2+1, 5= 2+1+1+1, 5= 1+1+1+1+1. Uma coleção de inteiros positivos cuja soma é igual ao inteiro positivo n é chamada de uma partição de n.

Denotamos por $p_{(n)}$ o número de partições de n, ou seja, o número de maneiras de representar n como soma de inteiros positivos, chamados partes da partição, onde a ordem dessas partes não importa. No exemplo citado no primeiro parágrafo, temos 7 maneiras de escrever o 5, portanto $p_{(5)} = 7$.

O estudo das partições teve início com o Tratado de Euler, onde se introduziu partições de inteiros como o tema é conhecido atualmente. Euler provou uma variedade de identidades de partições, dentre as quais o Teorema Pentagonal e o Teorema de Euler. Posteriormente um grande número de identidades de partições foram provadas, incluindo aquelas com os nomes de Gauss, Cauchy, Jacobi, Weirstrass, Sylvester, Heine, Lebesgue, Schur, MacMahon e Ramanujan. (Mucelin, 2011).

O estudo das partições é um tema robusto e contemporâneo, com alguns resultados clássicos e importantes que influenciaram o desenvolvimento da Combinatória no século 20 onde matemáticos como Ramanujan e Hardy tem uma grande importância. Pode-se dizer que se trata de um conjunto de técnicas, com um número de resultados redescobertos em muitas ocasiões, e algumas bijeções fundamentais que ainda continuam obscuras.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma introdução ao tema de uma forma coerente e clara.

O capítulo 1 será dividido em 4 secções: na secção 1 serão mostrados aspectos históricos e alguns matemáticos de extrema importância para construção do tema, na secção 2 será explicado o conceito de partições e apresentada uma fórmula aproximada para o número de partições de cada inteiro. Na secção 3 será mostrada a principal ferramenta para a representação das partições e para as provas bijetivas que é o gráfico de Ferrers (ou diagrama Young), e na secção 4 será mostrado o uso de funções geradoras. O capítulo 2 trará a metodologia utilizada e no último capítulo serão mostrados alguns exercícios de aplicação. Embora pareça simples, é surpreendente notar que alguns resultados de identidades de partições muito importantes sejam difíceis de serem provados por outros meios. Ao decorrer do trabalho será possível observar que descobrir as provas bijetivas representa um grande desafio de engenhosidade matemática, mas uma vez encontradas, em geral, não são difíceis de serem entendidas. É evidente que nem todas as identidades de partições serão abordadas devido à grande quantidade de resultados existentes atualmente. Não é fácil encontrar uma bijeção ou um processo que prove determinada identidade.

# CAPITULO 1

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 1. ASPECTOS HISTÓRICOS

Como disserta Cecília Pereira de Andrade (2009), Leibniz pergunta em uma carta para Bernoulli sobre partições de inteiros, a primeira pessoa segundo a autora a questionar o tema. De acordo com Mucelin (2011) o início do estudo das partições veio com o matemático Euler que provou inúmeras identidades em partições e logo o tema ganhou muito importância em teoria dos números. Por se tratar de um assunto multidisciplinar, de muitas aplicações práticas, o tema foi ganhando seu espaço dentro da combinatória apesar de que muitas das provas em partições se deram através do método analítico e não pela combinatória.

Como narra Cláudio Mucelin (2011) o primeiro matemático a realizar provas bijetivas em identidades de partições foi o matemático James Joseph Sylvester juntamente com sua equipe de colaboradores através do método do construtivismo e nos anos seguintes muitos nomes famosos dentro da matemática também deram suas contribuições para este tema como Gauss, Cauchy e Ramanujan.

> Por volta de 1965 a “era dourada” começou. Em menos de 20 anos, muitas pessoas provaram um grande número de identidades de partições por métodos combinatórios, dando impressão que se deve esperar uma prova construtiva da maioria, se não todas, identidades de partições. Este foi o período que George Andrews entrou em cena e desempenhou um papel importante nestes desenvolvimentos. Em seus dois fundamentais trabalhos, ele construiu, em ambos, uma base de técnicas padrões pelas quais as partições bijetivas são obtidas. Depois dos anos 70, parecia que a Teoria da Unificação estava à vista. (MUCELIN, 2011, p.3).

Interessante observar que até os dias atuais a principal identidade de partições, a de Ramanujan, ainda não tem uma prova bijetiva direta o que deixa um desafio de se conseguir provas que ainda não existem e um campo muito amplo para a exploração desse tema.

## 2. PARTIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

De acordo com José Plínio de Oliveira Santos (2005), uma partição de um inteiro positivo n é uma forma de decomposição de n como soma de inteiros positivos. Duas somas são consideradas iguais se, e somente se, possuem o mesmo número de parcelas e as mesmas parcelas, mesmo que em ordem diferente. Pode-se representar uma partição λ de n por $\lambda = \lambda_1 + \cdot \cdot \cdot + \lambda_r$, por $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ ou ainda apenas pelo conjunto de suas partes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Pode-se convencionar que a única partição de 0 é o conjunto vazio, ∅, logo p (0) = 1. Por exemplo, de quantas maneiras pode-se escrever o número 4?. Esse número pode ser expresso como: 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1. Verifica-se que há cinco maneiras de representar o número 4, portanto p(4) = 5. Um outro exemplo seria o número de partições do inteiro 6: 6, 5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1 onde pode-se verificar que o número de partições p(6) = 11.

> Para ilustrar quão rápido é o crescimento de p(n), listamos alguns outros valores: p(20) = 627, p(100) = 190569292 e p(200) = 3972999029388. Mencionamos, ao leitor interessado, a existência de uma fórmula exata para o cálculo de p(n). Isto resultou do trabalho dos matemáticos S. Ramanujan, G.H. Hardy e H. Rademacher, ver [2]. As principais ideias para a obtenção dessa genial fórmula foram do grande matemático indiano Ramanujan. (SANTOS, 2005, p.160).

A fórmula de Ramanujan foi testada em computadores com mais de 100 dígitos e possui uma margem de erro muito pequena. Não se sabe sobre como ele, apenas fazendo uso da manipulação de números, chegou de forma brilhante nela. A fórmula das partições de Ramanujan é $P(n) \sim \frac{e^{\pi.\left(\sqrt{2n/3}\right)}}{4n\sqrt{3}}$ . Vale ressaltar que essa fórmula foi aperfeiçoada tardiamente.

## 3. GRÁFICO DE UMA PARTIÇÃO

De acordo com José Plínio (2005) uma forma bastante útil de representar as partições de um número inteiro n positivo é pelo gráfico de Ferrers que consiste preencher com pontos, em ordem não crescente, um número igual a cada uma das partes como no exemplo: Tomando o inteiro positivo n=8 e escrevendo  como uma de suas partições possíveis: 4+3+1, onde na primeira linha há 4 pontos representando a primeira parcela, na segunda 3 pontos representando a segunda parcela e na terceira 1 ponto representando a terceira parcela, indicando cada umas partes em que foi divido o número 8.

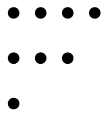


Figura 1: Partição do número 8 através de 4+3+1

Poderíamos representar o mesmo número 8 através de uma outra partição como 5+2+1 onde teríamos na primeira linha 5 pontos, na segunda linha, 2 pontos, e na terceira linha 1 ponto.

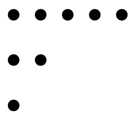


Figura 2: Partição do número 8 através de 5+2+1

O gráfico de Ferrers pode ser usado para as provas bijetivas de identidades em partições. Ao trocar as linhas pelas colunas obtém-se uma nova partição do mesmo número e essa nova partição é chamada de conjugada da primeira. Ver exemplo a seguir:

5+4+2+2+2+1+1 7+5+2+2+1

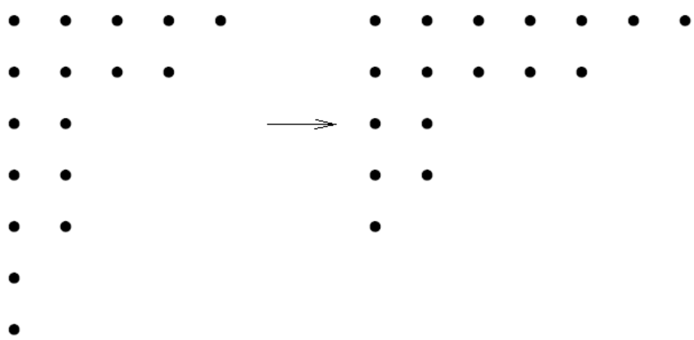


Figura 3: Partição conjugada de 5+4+2+2+2+1+1

O exemplo mostrado refere-se a duas partições do número 17, sendo uma conjugada da outra, pois observa-se que os pontos que estavam nas linhas da primeira partição agora se encontram na coluna da segunda partição.

Poderá ocorrer também de uma partição ser autoconjugada que é o caso em quem ao fazer a troca da linha pela coluna no gráfico de Ferrers gera a mesma partição, ou seja, é quando uma partição é igual a sua partição conjugada. Os exemplos a seguir ilustram essa situação.

3+2+1 3+2+1

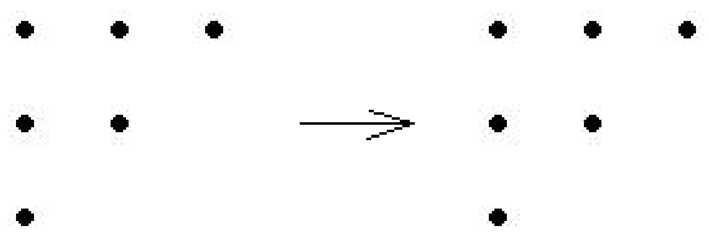


Figura 4: Partição conjugada de 3+2+1

5+4+3+2+1 5+4+3+2+1

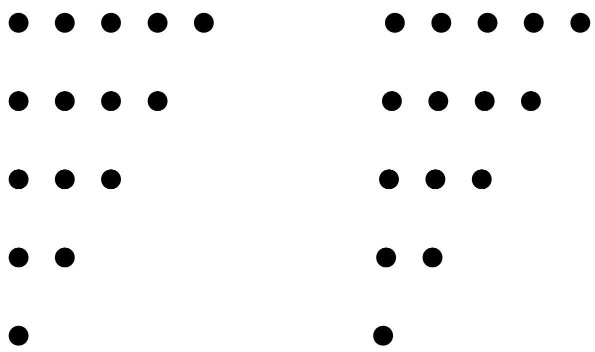


Figura 5: Partição conjugada de 5+4+3+2+1

Os resultados a seguir ilustram a importância do gráfico de Ferrers e para o objetivo desse trabalho, pois, para fazer provas bijetivas em algumas identidades de partições será necessário, vez ou outra, recorrer a algum ou alguns desses teoremas.

**Teorema 1**.“*Sendo $p_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte e sendo $q_k(n)$ o número de partições de n com exatamente k partes, pode-se demonstrar que $p_k(n) = q_k(n)$”.*

**Demonstração**: Através da operação "conjugação", que já foi previamente mostrada no gráfico de Ferrers, definida no conjunto das partições de n, é possível verificar que toda partição tendo k como maior parte é transformada em uma partição que possui exatamente k partes, e que cada uma que possui k partes é levada em uma que possui k como a maior parte, o que conclui a demonstração.

**Corolário 2. "***Seja $P_k$ (n) o número de partições de n com partes menores ou iguais a k, e $Q_k$ (n) o número de partições de n com, no máximo, k partes, pode-se demonstrar que $P_k$ (n) = $Q_k$ (n)".*

**Demonstração:** Pela operação de conjugação pode-se transformar cada elemento contado por $P_k$ (n) em um único elemento contado por $Q_k$ (n), isto pela mesma razão apresentada na demonstração do teorema. Se denotarmos por F(n) o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes e por G(n) o número de partições de n em partes maiores do que 1 e tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes, pode-se mostrar que F(n) = G(n).

**Teorema 3:** *F(n) = G(n) para todo inteiro positivo n.*

**Demonstração:** Uma vez mais tomando-se o conjugado de uma partição enumerada por F(n), teremos exatamente um dos elementos enumerados por G(n). o exemplo a seguir ilustra esta afirmação.

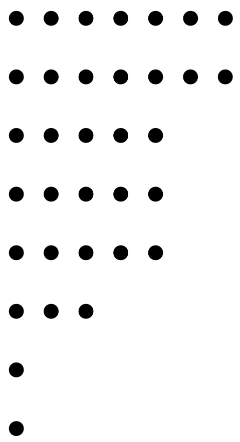


Figura 6: Número 34 através de 7+7+5+5+5+3+1+1

O fato de cada parte aparecer pelo menos duas vezes implica que, na partição conjugada, a menor parte será pelo menos 2 e que inteiros consecutivos não poderão ocorrer como partes.

Muitas provas bijetivas de identidades em partições são obtidas simplesmente por alguma transformação nos seus gráficos de Ferrers. No exemplo a seguir será apresentada uma prova bijetiva cuja finalidade é mostrar que o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas. Para ilustrar esta transformação, vamos considerar o gráfico de Ferrers da partição autoconjugada 7 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 de 26:

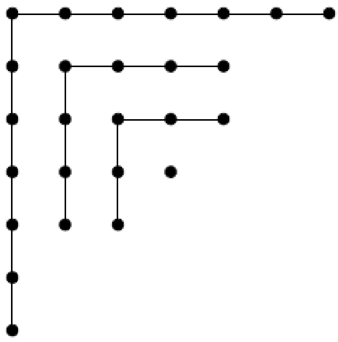


Figura 7: Número 26 representado por 7+5+5+4+3+1+1

É claro que o número de pontos em cada uma das “linhas” em formato de “L” é ímpar e estes números são necessariamente distintos. Neste caso, lendo o número de pontos sobre cada “linha”, temos a partição 13 + 7 + 5 + 1 de 26. Reciprocamente, dados números ´ımpares distintos, podemos colocá-los numa disposição semelhante a que temos acima, obtendo, desta forma, o gráfico de Ferrers de uma partição autoconjugada. Por exemplo, a partição 11 + 9 + 5 + 3 de 28 é representada por:

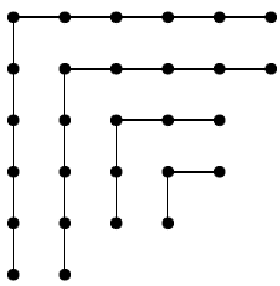


Figura 8: Número 28 representado por 11+9+5+3

Esta partição é autoconjugada o que demonstra o teorema que diz que o número de partições autoconjugadas de n, sendo n um inteiro positivo, é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.

## 4. FUNÇÕES GERADORAS

Uma função geradora ou função geratriz é uma série formal cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão $a_n$ cujo índice percorre os números naturais. (Wilf, 1994).

Existem vários tipos de funções geradoras: funções geradoras ordinárias, funções geradoras exponenciais, série de Lambert, série de Bell, série de Fourier, série de Eisenstein e a série de Dirichlet; das quais existem muitos exemplos. Cada sucessão tem uma função geradora de certo tipo. Este tipo de função geradora que é apropriada num contexto dado depende da natureza da sucessão e dos detalhes do problema analisado.

As funções geradoras são expressões fechadas num argumento formal x. Às vezes, uma função geradora é avaliada num valor específico x=a pelo que se deve ter em conta que as funções geradoras são series formais, que não se considera nem se analisa o problema da convergência para todos os valores de x. (Wilf, 1994).

É importante observar que as funções geradoras não são realmente funções no sentido usual de ser uma relação entre dois conjuntos, ou seja, entre um domínio e um contradomínio. O nome é unicamente o resultado do desenvolvimento histórico de seu estudo.

As funções geradoras terão um papel importante no auxílio de problemas de partições

> Essa técnica teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754) e, posteriormente, foi empregada por L. Euler (1707-1783) em problemas da Teoria Aditiva de Números, por S. Laplace (1749-1827) na Teoria de Probabilidade e por N. Bernoulli (1687-1759) no estudo de Permutações caóticas.(SANTOS, SILVA, 2010, p.5)

Antes da formalização do conceito de função geradora, pode-se examinar o seguinte problema: encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, sendo $x_1 \in \{1, 2, 3\}$ e $x_2$, $x_3 \in$

{4,5}. Pode-se definir três polinômios, um para cada variável, da seguinte forma:

$P_1(x) = x^1 + x^2 + x^3$ ;

$P_2(x) = x^4 + x^5$ ;

$P_3(x) = x^4 + x^5$ ;

Verifica-se que os expoentes em $p_1(x)$ são os valores possíveis para a variável $x_1$ e os expoentes em $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são os valores que podem assumir $x_2$ e $x_3$. Considerando agora a expansão do produto desses três polinômios:

$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)$

$= (x^1 + x^2 + x3)(x^4 + x^5)(x^4 + x^5)$

$= x^9 + 3x^{10} + 4x^{11} + 3x^{12} + x^{13}$

Olhando para esta expansão, nota-se que não há potências de x inferiores a 9. Isso quer dizer que não há termos, um em cada polinômio, tendo por soma dos respectivos expoentes um número inferior a 9 Também não há expoentes maiores do que 13. Pode-se observar ainda que os coeficientes de $x^9$, $x^{10}$, $x^{11}$, $x^{12}$ e $x^{13}$ são, respectivamente, os números de escolhas possíveis para os expoentes em $p_1(x)$; $p_2(x)$ e $p_3(x)$ de modo que a soma dê 9; 10; 11; 12 e 13. Portanto a resposta ao problema é 4: $x^1x^5x^5$ ($x_1 = 1$; $x_2 = 5$ e $x_3 = 5$), $x^2x^4x^5$ ($x_1 = 2$; $x_2 = 4$ e $x_3 = 5$), $x^2x^5x^4$ ($x_1 = 2$; $x_2 = 5$ e $x_3 = 4$) e $x^3x^4x^4$ ($x_1 = 3$; $x_2 = 4$ e $x_3 = 4$).

Pode-se considerar agora um outro problema onde, novamente, a introdução de certos polinômios revela-se útil. Supõe-se uma caixa contendo quatro bolas: duas amarelas, uma branca e uma cinza. Representando por a; b e c, respectivamente, as bolas de cor amarela, branca e cinza, podemos listar todas as possibilidades de tirarmos uma ou mais bolas desta caixa:

Maneiras de tirar uma bola: a; b; c;

Maneiras de tirar duas bolas: aa; ab; ac; bc;

Maneiras de tirar três bolas: aab; aac; abc;

Maneiras de tirar quatro bolas: aabc:

Associa-se o polinômio $1+ax+a^2x^2$ às bolas de cor amarela; às bolas de cor branca e cinza associamos, respectivamente, os polinômios 1 + bx e 1 + cx.

Interpreta-se o polinômio $1+ax+a^2x^2$ da seguinte forma: o termo ax significa que uma bola de cor amarela foi escolhida, o termo $a^2x^2$ que duas amarelas foram escolhidas e o termo constante $1(= x^0)$ que nenhuma bola amarela foi escolhida. De forma análoga, interpretam-se os polinômios $1 + bx$ e $1 + cx$. Cada um destes polinômios controla, portanto, a presença de bolas de uma determinada cor. Olhando, agora, para o produto destes três polinômios:

$(1+ax+a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) =$

$1+(a+b+c)x+(a^2+ab+ac+bc)x^2+(a^2b+a^2c+abc)x^3+(a^2bc)x^4$.

Como se pode observar, este produto fornece, diretamente, a lista de possibilidades obtida acima. O termo $a^2$, que aparece no coeficiente de $x^2$, surgiu ao tomar-se $a^2x^2$ no primeiro polinômio, o termo 1 (significa "não" pegar b) em $1 + bx$ e o termo 1 (significa "não" pegar c) em $1 + cx$, isto é, deve-se tomar duas bolas amarelas, nenhuma bola branca e nenhuma bola cinza. O termo $acx^2$, que surgiu do produto $(ax)(1)(cx)$, significa a retirada de uma bola amarela, nenhuma branca e uma cinza. Pode-se observar que o expoente de x representa o número de bolas retiradas da caixa e o coeficiente, a lista destas possibilidades. Caso houvesse um interesse, não na listagem das diferentes escolhas possíveis, mas somente no número de tais diferentes escolhas, bastaria tomar, no produto dos três polinômios, $a = b = c = 1$, obtendo $(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + 1x^4$; o qual mostra que existem 3 maneiras de retirar apenas uma bola, 4 de retirar duas bolas, 3 de retirar três bolas, 1 de retirar quatro bolas e $1(= 1x^0)$ de não retirar nenhuma bola.

Diz-se que o polinômio $1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + 1x^4$ é a função geradora para o problema apresentado, uma vez que a sequência formada pelos seus coeficientes, 1; 3; 4; 3; 1, fornece as respostas para este problema de contagem.

Agora que já se tem uma noção do que seja uma função geradora, pode-se defini-la formalmente. Uma série de potências é uma soma infinita da forma $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$, onde $a_i$, para $i = 1; 2; 3;...$ são números reais e x é uma variável. Por esta dentição, qualquer polinômio em x é uma série de potências. Por exemplo, o polinômio $2x + 3x^3 + x^4$ pode ser escrito como $0 + 2x + 0x^2 + 3x^3 + 1x^4 + 0x^5 + 0x^6 + ....$ A função geradora é definida justamente como essa série infinita $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....$ Vejamos o exemplo:

Encontrar a função geradora ordinária f(x) na qual o coeficiente $a_r$ de $x^r$ é o número de soluções inteiras não-negativas da equação $2x + 3y + 7z = r$.

Escrevendo $x_1 = 2x$; $y_1 = 3y$ e $z_1 = 7z$, temos $x1 + y1 + z1 = r$; com a restrição de que $x_1$ seja múltiplo de 2, $y_1$ múltiplo de 3 e $z_1$ múltiplo de 7. Desta forma, a série de potências cujos expoentes são os possíveis valores de $x_1$ é: 1 + $x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ....$ Para $y_1$ e $z_1$, temos, respectivamente, $1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + ...$

E $1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + ....$

Desta forma, a função geradora ordinária f(x) é dada por:

$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ...)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + ...)(1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + x^{28} + ...)$.

Neste produto é fácil ver que o coeficiente de $x^6$ é igual a 2, isto é, $X^6$ só aparece ao tomarmos $x^6$ no primeiro fator e 1 nos dois outros, ou 1 no primeiro e no último e $x^6$ no segundo. Como $x^6$, no primeiro, significa atribuir o valor 6 para $x_1$ (x1 = 2x), temos que uma solução para 2x + 3y + 7z = 6 é x = 3; y = 0; z = 0. O outro caso, $x^6$ só segundo fator e 1 nos restantes, isto é, $y_1 = 6(y_1 = 3y)$, dá a solução x = 0; y = 2; z = 0 para 2x + 3y + 7z = 6.

> No contexto de funções geradoras, estaremos interessados somente no cálculo dos coeficientes destas funções e raramente precisaremos atribuir valores à variável x. Por este motivo, vamos manipular tais séries sem nenhuma preocupação com questões de convergência. Quando vistas desta maneira, estas séries são chamadas séries de potências formais. (SANTOS, SILVA, 2010, p.9)

Faz-se necessário a apresentação de um teorema muito importante juntamente com suas propriedades que servirão para provas bijetivas no desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 4. Sendo f(x) e g(x) as funções geradoras das sequências $(a_r)$ e $(b_r)$, respectivamente, temos:

Propriedade i) Af(x) + Bg(x) é a função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$;

Propriedade ii) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k}))x^n$;

Propriedade iii) A função geradora para $(a_0 + a_1 + ... + a_r)$ é igual a $(1 + x + x^2 + ...)$ f (x);

Propriedade iv) A função geradora para $(ra_r)$ é igual a xf'(x), onde f'(x) é a derivada de f com respeito a x;

Propriedade v) $\int f_{(x)}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

As demonstrações desse teorema não se fazem necessárias visto que o objetivo deste trabalho é apenas utilizar tais propriedades como base para dar exemplos de provas bijetivas em identidades de partições. Esses conceitos iniciais de funções geradoras serão utilizados na parte do desenvolvimento do tema para verificar que existem funções geradoras em partições.

## CAPITULO 2

## METODOLOGIA DA PESQUISA

A pesquisa será bibliográfica com o intuito de levantar um conhecimento disponível sobre teorias, a fim de analisar, produzir ou explicar um objeto sendo investigado e visando analisar as principais teorias de um tema, no caso, as provas bijetivas em identidades de partições e pode ser realizada com diferentes finalidades. (CHIARA, KAIMEN et al., 2008).

Consiste ainda na utilização do método histórico, fazendo um breve relato sobre como e onde começaram a ser desenvolvidas tais provas bijetivas e por fim provar algumas identidades de partições utilizando como ferramenta principal os gráficos de Ferrers.

# CAPITULO 3

# DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

## 1- Provas bijetivas de identidades em partições

Na Tabela 1.1 estão listadas, na primeira coluna, todas as partições de 6 formadas apenas por partes ímpares e, na segunda coluna, as partições de 6 cujas partes são distintas, isto é, as partes da partição são diferentes duas a duas. Observe que p (6|partes são ímpares) = p (6|partes são distintas), isto é, o número de partições de 6 em partes ímpares é igual ao número de partições de 6 em partes distintas.

Tabela 1.1 (Partições de 6 em partes ímpares e em partes distintas)

| Partes ímpares | Partes distintas |
|---|---|
| 5+1 | 6 |
| 3+3 | 5+1 |
| 3+1+1+1 | 4+2 |
| 1+1+1+1+1+1 | 3+2+1 |

Afirmações como "O número de partições de n do tipo A é igual ao número de partições de n do tipo B" são chamadas de identidades em partições. Possivelmente já se sabia que a observação que fizemos com base na tabela acima vale, na verdade, para todo inteiro positivo n, mas foi Leonhard Euler, em 1748, quem primeiro provou o seguinte teorema.

**Teorema 1.1.1.** (Euler). *Para qualquer inteiro positivo n, p (n|partes são ímpares) = p (n|partes são distintas).*

Uma prova bijetiva para uma identidade em partições consiste em se obter uma bijeção entre o conjuto de partições do tipo A e o conjunto de partições do tipo B. Para exemplificar o que estamos dizendo, apresentamos uma prova bijetiva do teorema de Euler:

Operação 1 - De partes ímpares para partes distintas: dada uma partição λ de n em partes ímpares, se esta não possuir partes repetidas, não há nada a fazer; caso contrário, isto é, se em λ há partes repetidas, somamos duas a duas as partes iguais. Repetimos este procedimento até obter apenas partes distintas (como o número de partes decresce a cada operação, repetiremos o procedimento no máximo até restar uma parte). Por exemplo, 5 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 → 5 + (3 + 3) + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) = 6 + 5 + 3 + 2 + 2 → 6 + 5 + 3 + (2 + 2) = 6 + 5 + 4 + 3.

Operação 2 - De partes distintas para partes ímpares: dada uma partição de n em partes distintas, se esta possuir apenas partes ímpares não há nada a fazer; caso contrário, cada parte par é dividida por 2, originando duas novas partes iguais. Repetimos esta operação até restarem apenas partes ímpares (o que é sempre possível porque, a cada operação de dividir uma parte par em duas, o tamanho das partes pares está diminuindo). Por exemplo, 6 + 5 + 4 + 3 → (3 + 3) + 5 + (2 + 2) + 3 = 5 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 → 5 + 3 + 3 + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) = 5 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1.

Denotando agora por A e B os conjuntos formados pelas partições de n em partes ímpares e em partes distintas, respectivamente, temos que f: A → B definida por f(λ) = μ, onde μ é a partição obtida a partir de λ ∈ A pela Operação 1, é uma bijeção cuja inversa satisfaz, devido a Operação 2, $f^{-1}(\mu) = \lambda$. Com isto temos uma prova bijetiva do Teorema de Euler.

Tal prova bijetiva pode ser feita pelo uso de funções geradoras também como será mostrado a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{(n \mid \text{partes distintas})} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{(n \mid \text{partes ímpares})} q^n$$

Escolhendo o conjunto S como conjunto dos naturais e dos ímpares, respectivamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{(n \mid \text{partes distintas})} q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{(n \mid \text{partes ímpares})} q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - q^{2n-1}}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots$$

$$= \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1-q^2}\right)\left(\frac{1-q^6}{1-q^3}\right)\left(\frac{1-q^8}{1-q^4}\right)\ldots$$

$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^{2n-1}}\right)$$

Vejamos agora como este processo “somar/dividir” pode ser empregado para provar a seguinte identidade, válida para n ≥ 1, p (n | partes ∈ {1}) = p (n | partes são potências distintas de 2). É claro que p (n | partes ∈ {1}) = 1, pois há apenas uma partição de n formada por partes iguais a 1. O processo de “somar”, Operação 2 acima, transforma pares de 1s em partes 2; na sequência, transforma pares de 2s em partes 4; depois, pares de 4s são transformados em partes 8, e assim por diante. Como consequência, o conjunto de partições obtidas tem partes distintas e estas partes estão no conjunto formado pelas potências de 2 {1, 2, 4, ...}. Reciprocamente, cada potência de 2, digamos $2^k$, é dividida em um par de potências de 2, $2^{k-1} + 2^{k-1}$. Como a única potência de 2 ímpar é $2^0 = 1$, o processo de “dividir”, Operação 1, será executado até restarem apenas partes iguais a 1. Assim, vemos que a identidade acima é, de fato, verdadeira.

Vimos até aqui que o processo de “somar/dividir” descrito acima nos permitiu provar duas identidades. Seria possível obter novas aplicações? Em outras palavras, para quais conjuntos N ⊂ ℕ de partes de partições podemos obter uma bijeção com as partições com partes distintas em algum M ⊂ ℕ? Os conjuntos para os quais é possível obter uma bijeção através de “somar/dividir” são chamados de pares de Euler. É fácil obter novos pares de Euler de antigos pela multiplicação de cada parte por um inteiro positivo. Por exemplo, multiplicando a identidade anterior por 3, obtemos a identidade: p (n | partes ∈ {3}) = p (n | partes ∈ {3, 6, 12, 24, ...}).

Seja N ⊂ ℕ um conjunto de partes. Pares de partes iguais são somados em cada passo do processo de “somar” até restarem apenas partes distintas. Este processo pode ser invertido, ou desfeito, de maneira única se dividirmos partes pares em duas novas partes iguais, desde que saibamos exatamente quando parar de dividir, isto é, quando as partes obtidas estiverem

no conjunto N. Mas, por exemplo, na identidade acima, se 3, 6 $\in$ N não saberíamos se o correto seria parar ao obter partes iguais a 6 ou iguais a 3:
6 + 6 → 12 ou 3 + 3 + 3 + 3 → 6 + 6 → 12

Não é difícil ver que este problema ocorre se, e somente se, existirem em N dois elementos tais que um é um potência de 2 vezes o outro. Portanto, o processo "somar/dividir" prova o teorema a seguir.

**Teorema 1.1.2.** *p (n | partes $\in$ N) = p (n | partes distintas $\in$ M), onde N é um conjunto formado por inteiros positivos tais que nenhum de seus elementos é igual a uma potência de 2 vezes algum outro elemento, e M é o conjunto formado pelos elementos de N juntamente com produtos de elementos de N por potências de 2, ou seja,* $M = N \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} 2^k N$.

Na verdade, é possível provar ainda mais: os únicos pares de Euler possíveis são aqueles descritos pelo teorema acima. Como exercício, fica a tarefa de demonstrar esta afirmação. Consideremos agora a seguinte identidade: p (n | a maior parte é r) = p (n – r | cada parte é ≤ r), sendo n e r inteiros positivos, com n ≥ r. Apresentamos a seguir uma prova bijetiva bastante simples. Dada uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$ de n, com $\lambda_1 = r$ e $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s$, ao removermos a maior parte, $\lambda_1$, ficaremos com uma partição $\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_s$ de n − r tal que cada parte é menor do que ou igual a r. Claramente este procedimento é invertível, bastando acrescentar uma parte r a qualquer partição de n−r com partes menores do que ou iguais a r. Assim, temos estabelecido uma prova bijetiva para a identidade apresentada.

Será denotado por por $A_k(n)$ o número de partições de n em partes ímpares, não necessariamente distintas, possuindo exatamente k partes diferentes. Seja, também, $B_k(n)$ o número de partições $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ de n tais que a sequência $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ é formada por exatamente k sequências não consecutivas de um ou mais inteiros consecutivos. Para tornar claras as definições de $A_k(n)$ e $B_k(n)$, serão vistos alguns exemplos: $A_3(14) = 7$, pois as partições contadas por $A_3(14)$ são 9 + 3 + 1 + 1, 7 + 5 + 1 + 1, 7 + 3 + 3 + 1, 7 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1, 5 + 5 + 3 + 1, 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 e 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1; e $B_3(14) = 7$, sendo 10 + 3 + 1, 9 + 4 + 1, 8 + 4 + 2, 8 + 5 + 1, 7 + 5 + 2, 7 + 4 + 2 + 1 e 6 + 4 + 3 + 1 as partições contadas por $B_3(14)$. Na Tabela 1.2 temos, para n = 15 e k = 3, as onze partições de cada tipo.

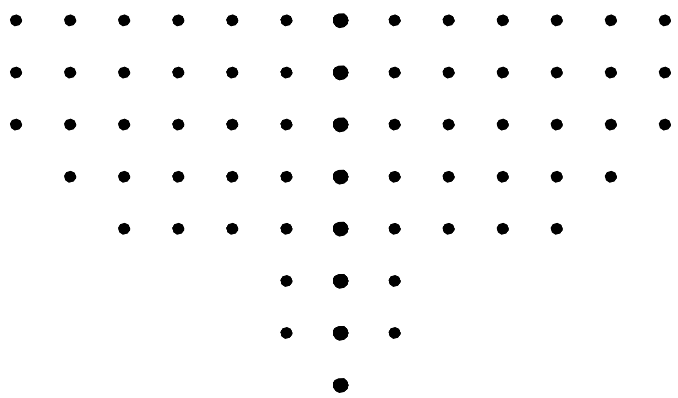
Tabela 1.2 (partições para n=15 e k=3)

| 3 partes ímpares diferentes | 3 sequências de inteiros consecutivos |
|---|---|
| 11+3+1 | 8+6+1 |
| 9+5+1 | 7+5+2+1 |
| 7+5+3 | 6+5+3+1 |
| 9+3+1+1+1 | 9+5+1 |
| 7+5+1+1+1 | 8+4+2+1 |
| 7+3+1+1+1+1+1 | 10+4+1 |
| 7+3+3+1+1 | 8+5+2 |
| 5+5+3+1+1 | 7+4+3+1 |
| 5+3+3+3+1 | 7+5+3 |
| 5+3+3+1+1+1+1 | 9+4+2 |
| 5+3+1+1+1+1+1+1+1 | 11+3+1 |

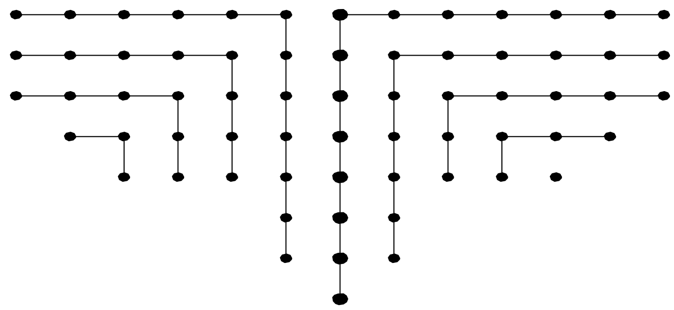
No século XIX, o matemático James J. Sylvester apresentou o seguinte importante resultado:

**Teorema 1.1.3** (Sylvester). *$A_k(n) = B_k(n)$, para quaisquer inteiros k e n.*

A demonstração deste teorema será apenas ilustrada. Para obter uma bijeção, foi feita uma variação no gráfico de Ferrers das partições em partes ímpares. Na representação gráfica de uma partição as linhas são alinhadas à esquerda. Depois é só alinhá-las ao centro. Assim, pode-se representar a partição 13 + 13 + 13+ 11 + 9 + 3 + 3 + 1 por:



Agora, considerando este novo diagrama, conectam-se os pontos da seguinte maneira:



e cada parte da nova partição é obtida contando a quantidade de pontos conectados, o que resulta na partição 14 + 12 + 11 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1. Observa-se que esta nova partição possui partes distintas e exatamente cinco sequências separadas 14, 12 + 11,8 + 7 + 6, 4 + 3 e 1.

Muitas das identidades vistas têm a forma p (n | [alguma condição]) = p (n | partes em N), ∀ n > 0. É o caso, por exemplo, de p (n | partes distintas em M) = p (n | partes em N), onde (M, N) é um par de Euler. Ou ainda, p (n | no máximo k partes) = p (n | partes ≤ k). Diz-se que as partes de uma partição são 2-distintas se a diferença entre quaisquer duas partes é maior do que ou igual a 2. De maneira mais geral, dizemos que uma partição tem partes d-distintas se a diferença entre estas partes é de pelo menos d. Na Tabela 1.3 estão listadas todas as partições com partes 2-distintas para n = 1, 2, 3, ..., 11.

Tabela 1.3 Partições em partes 2-distintas

| n | quantidade | Partições em partes 2-distintas |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 4, 3+1 |
| 5 | 2 | 5, 4+1 |
| 6 | 3 | 6, 5+1, 4+2 |
| 7 | 3 | 7, 6+1, 5+2 |
| 8 | 4 | 8, 7+1, 6+2, 5+3 |
| 9 | 5 | 9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1 |
| 10 | 6 | 10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 6+3+1 |
| 11 | 7 | 11, 10+1, 9+2, 8+3, 7+4, 7+3+1, 6+4+1 |

Com base na Tabela 1.3, é possível construir um conjunto N tal que p (n | partes em N) = p (n | partes 2-distintas), ou seja, se quer encontrar uma identidade de partição envolvendo partições em partes 2-distintas. De início, faz-se com N = ∅ e então:

1. Deve existir uma partição de 1. Com partes em N = ∅ não há uma partição de 1. Assim, deve-se ter 1 ∈ N.

2. Deve existir uma partição de 2. Como se tem uma partição de 2 com partes em N = {1}, 1 + 1, segue que 2 ∉ N.

3. Deve existir uma partição de 3. Como se tem uma partição de 3 com partes em N = {1}, 1+1+1, segue que 3 ∉ N.

4. Devem existir duas partições de 4. Com partes em N = {1} se tem apenas uma partição de 4: 1 + 1 + 1 + 1. Assim, se deve ter 4 ∈ N.

5. Devem existir duas partições de 5. Com partes em N = {1, 4} tem-se duas partições de 5: 4 + 1,1 + 1 + 1 + 1 + 1. Assim, 5 ∉ N.

6. Devem existir três partições de 6. Com partes em N = {1, 4} temos apenas duas partições de 6: 4 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Assim, deve-se ter 6 ∈ N.

7. Devem existir três partições de 7. Com partes em N = {1, 4, 6} tem-se três partições de 7: 6 + 1,4 + 1 +1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Assim, 7 ∉ N.

8. Devem existir quatro partições de 8. Com partes em N = {1, 4, 6} tem-se quatro partições de 8: 6 + 1 + 1, 4 + 4, 4 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Assim, 8 ∉ N.

9. Devem existir cinco partições de 9. Com partes em N = {1, 4, 6} tem-se apenas quatro partições de 9: 6 + 1 + 1 + 1, 4 + 4 + 1, 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Assim, 9 ∈ N.

Até aqui foi obtido o conjunto N = {1, 4, 6, 9}. Prosseguindo com a argumentação acima, pode-se verificar que N = {1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24, ...}. Observa-se que os inteiros em N são aqueles que têm resto 1 ou 4 quando divididos por 5. Cada tal inteiro m ∈ N é dito congruente a 1 ou 4 módulo 5; notação m ≡ 1 ou 4 (mod 5). Com base na investigação acima, pode-se conjecturar a seguinte identidade p (n | partes ≡ 1 ou 4(mod 5)) = p (n | partes são 2-distintas), chamada de primeira identidade de Rogers-Ramanujan. Nota-se que não foi provada esta identidade. Apenas tem-se evidências, com base em alguns poucos exemplos, de que ela possa ser verdadeira.

Este mesmo método pode ser empregado para descobrir a segunda identidade de Rogers-Ramanujan: p (n | partes ≡ 2 ou 3 (mod 5)) = p (n | partes são 2-distintas e ≥ 1), onde m ≡ 2 ou 3 (mod 5) significa que ao dividir m por 5 o resto é 2 ou 3. É importante mencionar que até hoje não se obteve uma prova bijetiva simples e direta para as identidades de Rogers-Ramanujan acima.

## 2. Exercícios

1- De quantas formas podemos distribuir 5 bolas idênticas em 3 caixas de mesmo tipo e mesmo formato de maneira que nenhuma caixa fique sem bolas?

Para a resolução desse problema pode-se utilizar as partições de 5 que são: 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 e 1+1+1+1+1. As partições que interessaram são as que tem 3 partes onde cada parte ficaria em uma caixa. Portanto seriam as partições: 3+1+1 e 2+2+1. Então isso pode ser feito de deus maneiras: ou uma caixa fica com 3 bolas e as outras duas caixas ficam cada uma com 1 bola ou uma caixa fica com uma bola e as outras duas ficam cada uma com 2 bolas.

2- Utilizando o gráfico de Ferrers, determine as partições conjugadas de:

a) 5+2+1

b) 4+3+3+1

Resolução da letra a)

Representando a partição de 5+2+1 pelo gráfico de Ferrers tem-se:

● ● ● ● ●

● ●

●

Para determinar a partição conjugada basta trocar linhas por colunas, logo:

● ● ●

● ●

●

●

●

Portanto a partição conjugada é dada por 3+2+1+1+1

Resolução da letra b)

Representando a partição 4+3+3+1 pelo gráfico de Ferrers, tem-se:

● ● ● ●

● ● ●

● ● ●

●

Usando a operação conjugação já definida anteriormente, tem-se:

● ● ● ●

● ● ●

● ● ●

●

Pode-se verificar que a partição conjugada é dada por 4+3+3+1 que é igual a partição original, quando isso ocorre dizemos que a partição é autoconjugada.

3- Mostre que o número de partições de 5 em partes ímpares são iguais as partições de 5 em partes distintas.

Para fazer isso é necessário primeiramente identificar todas as partições de 5 cujas partes são ímpares. Elas são:5, 3+1+1 e 1+1+1+1+1. O segundo passo é fazer uso da demonstração do teorema 1.1.1.: Se as partes ímpares já são distintas então já há uma bijeção, porém se tiverem partes repetidas é necessário somar essas partes duas a duas até que não hajam mais partes repetidas. Então 5 já forma uma bijeção com ela mesma. Agora 3+1+1 deve-se fazer: 3+(1+1), ou seja 3+2 e 1+1+1+1+1 deve-se fazer: (1+1)+(1+1)+1 que resulta em 2+2+1, depois deve-se fazer (2+2)+1 resultando em 4+1. O processo contrário, ou seja, transformar partes distintas em partes ímpares, deve-se pegar as partes pares e dividir por 2 ate que so restem partes ímpares.Ou seja, 4+1 deve-se pegar o 4 e dividir por 2 resultando em 2+2+1 e depois 1+1+1+1+1 e a partição 3+2 resulta em 3+1+1. Organizando essa bijeção numa tabela tem-se:

| p(5/partes ímpares) | P(5/partes distintas) |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 3+1+1 | 3+2 |
| 1+1+1+1+1 | 4+1 |

4- Sejam n e r inteiros positivos com n≥r demonstre que:
*p*(*n* | *a maior parte é r*) = *p*(*n* – *r* | *cada parte é* ≤ *r*).

Demonstração: Dada uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s$ de $n$ com $\lambda_1 = r$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_s$ ao removermos a maior parte $\lambda_1$, ficaremos com uma partição $\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_s$ de $n - r$ com partes menores do que ou iguais a $r$. Reciprocamente, acrescentando uma parte $r$ a qualquer partição de $n - r$ com partes menores do que ou iguais a $r$ obtemos uma partição de $n$ cuja maior parte é $r$.

5- Denotando por $q_k(n)$ o número de partições de $n$ com exatamente $k$ partes, demonstre que:

$q_k(n) = q_{k-1}(n-1) + q_k(n-k)$, *com* $q_k(n) = 0$ *para* $k > n$ *ou* $k < 0$, $q_0(n) = 0$ *para* $n > 0$ *e* $q_0(0) = 1$.

Demonstração: Seja $Q_j(i)$ o conjunto formado pelas partições de $i$ com exatamente $j$ partes. Então $|Q_j(i)| = q_j(i)$. Temos que $Q_k(n)$ é a união disjunta dos conjuntos:

$S = \{(u_1, \ldots, u_k) \in Q_k(n) | u_k = 1\}$

$T = \{(u_1, \ldots, u_k) \in Q_k(n) | u_k > 1\}$.

A função $f : S \to Q_{k-1}(n-1)$, dada por $f(u_1, \ldots, u_k) = (u_1, \ldots, u_{k-1})$ é uma bijeção cuja inversa satisfaz $f^{-1}((v_1, \ldots, v_{k-1})) = (v_1, \ldots, v_{k-1}, 1)$, logo $|S| = |Q_{k-1}(n-1)| = q_{k-1}(n-1)$. Por outro lado, a função $g : T \to Q_k(n-k)$ dada por $g(u_1, \ldots, u_k) = (u_1 - 1, \ldots, u_{k-1} - 1)$ é uma bijeção cuja inversa satisfaz $g^{-1}((v_1, \ldots, v_k)) = (v_1 + 1, \ldots, v_k + 1)$, logo $|T| = |Q_k(n-k)| = q_k(n-k)$. Portanto, $q_k(n) = |Q_k(n)| = |S| + |T| = q_{k-1}(n-1) + q_k(n-k)$.

6- Seja n um número inteiro positivo, demonstre que o número de partições de n em partes pares é igual ao número de partições de n onde cada parte aparece um número par de vezes, ou seja,

$$p\left(n \,/\, \text{partes pares}\right) = p\left(n \,/\, \text{cada parte aparece um número par de vezes}\right).$$

Demonstração: Partindo de uma partição de $n$ em partes pares, dividimos cada parte por 2 e obtemos assim uma partição de $n$ em que cada parte aparece um número par de vezes. Reciprocamente, partindo de uma partição de $n$ em que cada parte aparece um número par de vezes, adicionando duas a duas, obtemos uma partição de $n$ em partes pares.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível verificar neste trabalho o uso de brilhantes técnicas como o Gráfico de Ferrers para a demonstração de alguns resultados importantes de partições. As demonstrações aqui apresentadas visam fornecer, a quem tenha curiosidade ou interesse pelo tema proposto, fácil compreensão, o que torna o conteúdo agradável e de fácil entendimento a quem vê o assunto pela primeira vez. Ao longo do desenvolvimento do tema, o interesse por tais identidades em partições só aumentava e foi aguçado pelo filme “O Homem que viu o Infinito” que mostra a vida do grande matemático Ramanujan que foi por diversas vezes citado nesse trabalho.

Pode-se observar também que as técnicas para as demonstrações são simples o que tornava o assunto de mais fácil entendimento. Em alguns casos a demonstração analítica se mostra como a maneira mais rápida e fácil de verificar tais identidades em partições mas algumas outras técnicas demandam um pouco mais de paciência, intimidade e habilidade com o assunto proposto.

## REFERÊNCIAS


ANDRADE, Cecília Pereira de. **Uma Introdução à Teoria das Partições.** 2009. 58 f. Dissertação de (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

CHIARA, I. D. et al. **Normas de documentação aplicadas à área de Saúde.** Rio de Janeiro: Editora E-papers, 2008.

MUCELIN, Cláudio. **Demonstrações bijetivas em partições.** 2011. 55 f. Dissertação de (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

OLIVEIRA, Kelvin Souza de. **Propriedades aritméticas e combinatórias de funções que contam partições**. 2017. 85 f. Tese de (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

RIBEIRO, Andréia Cristina. **Aspectos Combinatórios de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan**. 2006. 58 f. Tese de (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

SAMPAIO, César adriano do Amaral. **Funções geradoras e aplicações em partições**. 1998. 92 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - IMECC-UNICAMP.

SANTOS, José Plínio de; SILVA, Robson. **Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números.** 1º Colóquio de Matemática da Região Sul. 2010. 91 p.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA,2005. 198 p.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro ; MURARI, Idani Therezinha Calzolari. **Introdução à Análise Combinatória**. 4 ed. 2007. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro. 390 p.

STABEL, E. C. **A fórmula de Hardy-Ramanujan-Rademacher das partições de um inteiro positivo.** 2007. 29 f. Dissertação de (Mestrado no Instituto de Matemática) – UFRGS.