

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ronald Patrick Batista de Azevedo

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL E
DE SUAS RELAÇÕES COM A VARIABILIDADE TEMPORAL DA
TEMPERATURA NA CIDADE DE MANAUS**

MANAUS, 2018

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL E
DE SUAS RELAÇÕES COM A VARIABILIDADE TEMPORAL DA
TEMPERATURA NA CIDADE DE MANAUS**

Ronald Patrick Batista de Azevedo

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Augusto dos Santos

Michiles

MANAUS, 2018

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior – UEA de **RONALD PATRICK BATISTA DE AZEVEDO**.

Aos 28 dias do mês de novembro de 2018, às 19:35 horas, em sessão pública na Sala Odaléa Frazão da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pelo professor da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisangela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Dr. ALESSANDRO AUGUSTO DOS SANTOS MICHILLES**, **Dr. ALMIR CUNHA DA GRAÇA NETO** e **Me. JEAN ANTUNES CUSTODIO DA COSTA** o aluno **RONALD PATRICK BATISTA DE AZEVEDO** apresentou o Trabalho: **“MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL E DE SUAS RELAÇÕES COM A VARIABILIDADE TEMPORAL DA TEMPERATURA NA CIDADE DE MANAUS.”** Como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,6 à monografia divulgando formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Helisangela Ramos da Costa

Presidente da Banca Examinadora

Almir Cunha da Graça Neto

Orientador (a)

Alessandro Augusto dos Santos Michilles

Avaliador 1

Jean Antunes C. da Costa

Avaliador 2

Ronald Patrick Batista de Azevedo

Aluno

DEDICATÓRIA

À minha família, pelo apoio emocional e financeiro. Em especial à minha mãe, Helena Dolores, que abdicou de sua própria vida para dar a mim e ao meu irmão tudo aquilo que a vida não lhe permitiu ter.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, o maior dos mestres, que está a todo momento ao meu lado, me ensinando a ser um homem íntegro e rígido, que se permite cair, mas não a ficar no chão, me permitindo ser forte a ponto de vencer o mundo. E ao professor Alessandro Michiles, pela dedicação ao me orientar.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Manaus.....	29
Figura 2: Gráfico dos dados populacionais	33
Figura 3: Gráfico da taxa de variação.....	34
Figura 4: Constante intrínseca de crescimento	35
Figura 5: População e temperatura	36
Figura 6: Construção no STELLA.....	39
Figura 7: Estrutura no STELLA	40
Figura 8: (a) antes do ajuste; (b) depois do ajuste.....	40
Figura 9: Comparação entre os métodos.....	41
Figura 10: Extrapolação dos dados obtidos	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados Populacionais de Manaus.....	30
Tabela 2: Dados de Temperatura Média da Cidade de Manaus.	30
Tabela 3: Dados da Taxa de Crescimento.	33
Tabela 4: Dados Populacionais e de Temperatura.	36
Tabela 5: Comparação entre os dados obtidos pelos métodos com os do IBGE.	41
Tabela 6: Estimativas de população e temperatura obtidos por RK para Manaus para os cenários 1, 2 e 3.....	43

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
1.1 Amazônia e o ciclo hidrológico	14
1.2 Perda do Solo Vegetal e a influência das Disfunções Ambientais na Temperatura Local	15
1.3 Expansão Territorial e a Cidade de Manaus	16
1.4 Ilhas de Calor na Cidade de Manaus	18
1.5 Modelagem Matemática de um Crescimento Populacional	21
1.6 Método Numérico Runge-Kutta de quarta ordem	25
1.7 A utilização do software STELLA para a aplicação de modelos de crescimento populacional	27
2. METODOLOGIA DA PESQUISA	29
3. DESCRIÇÃO DA PESQUISA	33
3.1 Taxa de Variação do Crescimento Populacional	33
3.2 Constante Intrínseca de Crescimento	35
3.3 Equação da Variação de Temperatura	36
4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	38
4.1 Solução Analítica da Equação Diferencial	38
4.2 Aplicação dos Modelos de Malthus e Verhurst no STELLA	38
4.3 Comparação dos Dados Obtidos	41
4.4 Cálculo dos Dados Populacionais por RK	42
4.5 Análise dos Dados da Temperatura Obtidos pela Aplicação dos Dados Populacionais na Equação 7	44
4.6 Extrapolção dos Dados Populacionais Obtidos por RK	45
4.7 Variações na Temperatura de Manaus Atualmente	47
CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
REFERÊNCIAS	51

INTRODUÇÃO

Atualmente, a população da cidade de Manaus já ultrapassou cerca de dois milhões de habitantes, segundo o Censo de 2017 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), e apresenta um clima equatorial úmido com temperatura média de 27,4 °C, segundo a classificação climática de Köppen-Geiger, sendo que sua variação de temperatura está diretamente relacionada à sua localidade geográfica, próxima ao Equador e na região central da maior floresta tropical do planeta, a Amazônia.

Por diversos fatos ocorridos no decorrer de sua história, a cidade de Manaus sofreu intensos aumentos populacionais em intervalos de tempo muito pequenos, fazendo com que o processo de urbanização provocasse grandes perdas do solo vegetal, causando disfunções na variação de temperatura local, devendo-se isto ao fato de que quando ocorre a troca da superfície natural por outra feita de concreto e asfalto, ocorrem maiores aquecimentos na área urbana quando comparada ao meio rural, interferindo diretamente nas variações de temperatura. Tais diferenças nas variações de temperatura na área urbanizada com a área florestal, em grandes metrópoles, são classificadas como “ilhas de calor” (CUSTÓDIO, 2011).

Diversos trabalhos realizados sobre a cidade de Manaus, que tinham a finalidade de estudar a intensidade das ilhas de calor em todo seu território, constataram que a variação de temperatura na área urbana da cidade é sempre maior do que na área rural, que seria a parte mais próxima da floresta. Dessa forma, na medida em que a população for crescendo, a tendência é que a cidade se expanda ainda mais, aumentando a variação de temperatura média na área urbana, e, portanto, sofreria menos influência da floresta em sua temperatura.

A influência na variação de temperatura média da cidade de Manaus, considerada neste trabalho, é apenas a nível atmosférico, resultante das relações que o solo tem com a atmosfera, através de processos físicos, que, em sua maior parte, depende da redistribuição de calor, realizando um papel de “filtro solar” para a cidade.

Logo, a hipótese é que o aumento na variação de temperatura média da cidade de Manaus está diretamente relacionado ao crescimento populacional.

Diante disso, o presente trabalho irá fazer uso da modelagem matemática para relacionar o crescimento populacional da cidade de Manaus com sua variação de temperatura média anual. Tal modelo será capaz de calcular a temperatura média da cidade em um determinado ano futuro. Para isso, será utilizado o software dinâmico STELLA, que terá como finalidade de determinar o melhor método de dinâmica populacional a ser relacionado com a variação de temperatura local.

O conhecimento prévio de possíveis mudanças na variação de temperatura da cidade de Manaus, em função da intensa expansão demográfica possui além de importância científica, relevância social, pois pode contribuir para a geração de cenários que apresentem as consequências da falta de investimento em políticas públicas para a ocupação adequada do solo.

O objetivo geral do trabalho é relacionar o crescimento populacional da cidade de Manaus com sua variação de temperatura média anual.

Dentre os objetivos específicos destacam-se: por meio do software STELLA, determinar as aproximações dos métodos de dinâmica populacional Malthus e Verhurst; Propor um novo modelo específico para o crescimento populacional da cidade de Manaus, sendo solucionado por meio do método numérico Runge-Kutta de quarta ordem; Determinar o modelo que apresenta a melhor aproximação do crescimento populacional da cidade de Manaus e em seguida utilizá-lo para determinar valores futuros para a populacional de Manaus;

O presente trabalho está subdividido da seguinte forma:

- O primeiro capítulo refere-se a revisão bibliográfica, no qual apresenta-se as implicações no clima local quando há a retirada do solo natural, em especial aquele ocorrido devido ao crescimento populacional;

- No segundo capítulo é apresentado todas as diretrizes de como foram coletados e trabalhado os dados;
- O terceiro capítulo explicita, descritivamente, os cálculos previstos na metodologia e as discussões dos resultados obtidos.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Amazônia e o ciclo hidrológico

A floresta Amazônica é considerada a maior floresta tropical do planeta, apresentando uma área total de 5 milhões de quilômetros quadrados, abrangendo territórios pertencentes a nove nações. Segundo o Instituto Nacional de pesquisa da Amazônia (INPA), a Amazônia é caracterizada como um enorme e complexo ecossistema altamente crítico para o clima global, que controla tanto os regimes de chuvas quanto todo o ciclo hidrológico.

As diversas pesquisas que comprovaram a atuação da Amazônia no ciclo hidrológico, em diferentes escalas espaciais (AMORIM, 2017; SANTANA, 2017; SILVA, 2012; SANTOS, 2010), observaram que as interações floresta amazônica-atmosfera influenciam diretamente nas precipitações locais e na incidência de radiação solar, pois apresenta uma intensa participação nos balanços globais de componentes gasosas, se tornando assim, de fundamental importância para a circulação de umidade na região. Em relação à sua bacia hidrográfica, estima-se que a área é capaz de transpirar cerca de 20 bilhões de toneladas de água por dia (NOBRE, 2014).

Com isso, seus efeitos sobre o ciclo hidrológico estão diretamente relacionados à variação de temperatura na cidade de Manaus, pois, as interações floresta amazônica-atmosfera são responsáveis por transportar enormes quantidades de água, que ocorre mediante o processo de evapotranspiração das árvores, que seria a capacidade da árvore de bombear do solo grandes quantidades de água para a atmosfera, sendo assim, um dos responsáveis por manter a temperatura baixa, pois, para evaporar um grama de água são necessárias cerca de 500 calorias. Relacionando isso com fato de que existem aproximadamente 600 bilhões de árvores presentes na Amazônia e que cada uma bombeia entre 300 e 1.000 litros de água por dia, conclui-se que a quantidade de calor que a Amazônia absorve determina a temperatura média anual em sua região (NOBRE, 2014).

A evapotranspiração também tem certa relevância na interação da floresta com a umidade vinda do oceano Atlântico trazida pelos ventos alíseos. Tal interação foi descoberta e estudada em 2006 pelos cientistas russos, Makarieva

e V. Gorshkov, que, segundo eles, a evaporação intensa da floresta, associada à condensação intensa das nuvens, cria zonas de baixa pressão atmosférica que tendem a deslocar o ar úmido do mar em direção ao continente, funcionando como uma bomba biótica de umidade, tornando, como consequência, o clima mais úmido na região (NOBRE, 2014).

1.2 Perda do Solo Vegetal e a influência das Disfunções Ambientais na Temperatura Local

Em diversas pesquisas (SANTOS, 2010; SAYDELLES, 2005; SANTANA, 2017), verificou-se que, quando se perde a cobertura vegetal, o solo passa a se relacionar de forma diferente com a atmosfera, sofrendo com uma maior reflexão da radiação solar que altera o balanço de energia e temperatura da superfície. Segundo Amorim (2017):

Os fluxos de calor sensível e latente são reduzidos, alterando a forma como a superfície se esfria. Somado a isso, estão os efeitos causados pela redução da rugosidade, índice de área foliar e profundidade das raízes, que afetam não somente os fluxos de calor latente, como também limitam a reciclagem de vapor d'água (AMORIM, 2017, p. 16).

Ou seja, a substituição de superfícies naturais por edificações, desencadeia intensas anomalias na variação de temperatura em cidades que apresentam um clima equatorial, como por exemplo, a cidade de Manaus. Logo, o uso intensivo do solo e a ausência de planejamento urbano geram disfunções ambientais, repercutindo na qualidade de vida da população local (NOGUEIRA, 2007).

Diversos trabalhos buscaram relacionar tais disfunções (SILVA, 2015; OLIVEIRA, 2008; ALMEIDA, 2007), provenientes do mau uso do solo, com a localidade dessas cidades e com a distribuição de água por meio do ciclo hidrológico. Relatou-se que, quando se observam cidades que apresentam climas tropicais, o mau uso do solo pode trazer consequências mais acentuadas do que em cidades que são mais distantes da linha do equador. Tratando sobre isso, em sua pesquisa, Amorim (2017) descreve o fenômeno da seguinte forma:

Além do aquecimento desigual da superfície do solo, a diferença na incidência dos raios solares devido à inclinação do eixo de rotação da Terra faz com que a região tropical receba um excesso de energia, enquanto as regiões polares tenham um déficit de energia. Com isso, os fluidos de água e ar ficam responsáveis por manter o equilíbrio do calor existente nessas regiões, interagindo entre si e também com o solo e os ecossistemas (AMORIM, 2017, p. 13).

Verifica-se que a perda do solo vegetal provoca mudanças em forma de cadeia na dinâmica local, pois qualquer intervenção tende a mudar todo um ecossistema.

É importante salientar que as intensas variações de temperatura em uma determinada região não acontece somente por conta da perda de uma grande área de solo vegetal, ela ocorre, também, em pequenas áreas que perderam sua superfície natural, apresentando anomalias na variação de temperatura em determinados locais. Este fato foi comprovado por meio de um estudo realizado por Custódio (2011), que tinha como objetivo apontar a necessidade da implantação de uma rede de estações meteorológicas na cidade de Manaus para ter acesso a uma maior rede de dados. Porém, em sua pesquisa, foi mostrado que em estações instaladas sobre o concreto apresentavam uma temperatura mais elevada do que em estações instaladas sobre a grama.

Logo, pode-se dizer que o desmatamento progressivo da floresta Amazônica tem relação direta com as disfunções ambientais na temperatura local. Estudos realizados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), por meio do Projeto de Monitoramento da Floresta Amazônica Brasileira por Satélite (PRODES), mostraram aumento na taxa de desmatamento de áreas em cada ano, comprovando o desequilíbrio no controle do desmatamento da floresta Amazônica. Toda essa área desmatada é uma ameaça imediata, pois afeta diretamente no sistema de evapotranspiração das árvores, culminando em disfunção na variação de temperatura local (AMORIM, 2017).

1.3 Expansão Territorial e a Cidade de Manaus

Além do desmatamento progressivo da floresta Amazônica para a extração de diversas riquezas do solo, outro grande fator responsável pelas intervenções no ecossistema são as expansões territoriais provenientes do aumento populacional, tendo em vista que a maioria das expansões territoriais não possuem planejamento algum, acarretando na degradação ambiental do solo ocupado.

Uma dessas expansões demográficas desordenadas encontra-se na cidade de Manaus, que sofreu uma rápida expansão demográfica, proveniente

das migrações ocorridas em dois períodos. Atualmente apresenta uma taxa de crescimento populacional mais elevado, quando comparado ao período anterior ao ano de 1967, com a criação do Polo Industrial. Neste caso, quando ocorre uma rápida urbanização, a cidade não é capaz de apresentar uma estrutura organizacional que possa suprir com a demanda, logo ocorre diversas ocupações irregulares que culmina na degradação ambiental.

Os dois períodos de grande crescimento populacional da cidade de Manaus devem-se, principalmente, às intensas imigrações ocorridas por dois principais motivos. O primeiro foi durante o auge do processo de extração do látex (1879-1912), que era matéria prima para as grandes indústrias do mundo que produziam borracha na época. Tal período foi responsável pela construção de diversos monumentos, ainda presentes na cidade, dentre eles o Teatro Amazonas.

O material era tão requisitado a ponto de o estado do Amazonas redirecionar toda sua economia e mão de obra para suprir a crescente demanda. Segundo o Censo de 1872, cerca de 2.199 estrangeiros imigraram para o Amazonas, todos atraídos pela forte economia sustentada pela grande produção de borracha. Na mesma época, houve a grande seca no Nordeste, que casou mais de um milhão de mortes, desta forma, muitos nordestinos decidiram migrar para o estado do Amazonas em busca de melhores condições de vida, intensificando, ainda mais, a vinda de pessoas para a cidade de Manaus (PINHEIRO, 2009).

O segundo período de grande influência nas características de ocupação da cidade de Manaus, ocorreu a partir do ano de 1967, quando foi criado o Polo Industrial de Manaus. Logo no seu início, as grandes indústrias foram capazes de suprir a necessidade de emprego em diversas áreas tecnológicas e de desenvolvimento na cidade de Manaus, atraindo mais migrantes, intensificando a expansão demográfica (PINHEIRO, 2009).

Por conta deste alto fluxo de pessoas, houve intensos congestionamentos nos serviços públicos, que já são precários em sua natureza, como, por exemplo: a captação de água para localidades cada vez mais distantes, a ampliação dos gasômetros, a construção de mais presídios. Gerando aumento da poluição

local, causados por tais atividades. Devido à sua intensa expansão, e mesmo ocupando apenas 4% de todo seu território, a área urbana do município de Manaus já é considerada a maior por município das regiões Norte e Nordeste (NOGUEIRA, 2007).

1.4 Ilhas de Calor na Cidade de Manaus

Tendo-se em vista que nos últimos anos têm havido intensas mudanças climáticas em cidades por todo planeta, surgiu a necessidade de se estimar tais variações, sendo que atualmente, as intensidades das ilhas de calor (IC) são verificadas por meio de satélites e modelagem computacional de auto nível, que foram desenvolvidos a partir da comparação de seus dados resultantes com os fornecidos por estações meteorológicas, que os possibilitam mudar, e até acrescentar, parâmetros que melhore as aproximações. Com isso, atualmente existem plataformas que disponibilizam dados obtidos pelos diversos sensores meteorológicos que orbitam nosso planeta, sendo capazes de modelar a distribuição de calor em diferentes tipos de solos.

Porém, na América do Sul houveram poucos trabalhos que fizeram uso de modelos meteorológicos que dispõem de parametrizações físicas, que verificam a variação de temperatura local que as ilhas de calor apresentam. Desta forma, Corrêa (2016) buscou aplicar os novos métodos para determinar as intensidades das ilhas de calor em Manaus, verificando, por meio do uso do modelo de pesquisa e previsão de tempo Weather Research and Forecasting (WRF), as implicações que a urbanização tem na variação de temperatura na cidade de Manaus.

No período de 2002-2005 e 2009-2012, Corrêa (2016) realizou uma comparação dos dados obtidos pelas estações meteorológicas, por meio do modelo WRF e pelo satélite MODIS, verificando que o satélite apresenta resultados muito próximos aos das estações meteorológicas, ao contrário do modelo WRF que considera apenas três classes de cobertura do solo, pois o MODIS apresenta uma maior quantidade. Resultando, então, na possibilidade de comparação de apenas três classes, sendo elas: a área urbana, vegetal e o rio.

Também é possível verificar, por meio do modelo WRF e o MODIS, que as ilhas de calor coincidem com os locais que apresentam maior densidade urbana, indicando uma grande influência das atividades humanas na variação de temperatura local. Desta forma, o sensoriamento remoto é considerado como uma fonte rentável de dados para a validação de modelagem computacional, sendo obtido a partir da “circulação de escala local que é interligada com os processos de balanço de energia e radiação da superfície que são determinantes da temperatura na superfície” (CORRÊA, 2016).

Como Manaus está localizada bem próximo à linha equatorial do globo, onde ocorrem excessos de energia proveniente do sol, é essencial a vegetação da floresta Amazônica, que é responsável por manter a temperatura amena, possibilitando conforto térmico na região. Ou seja, sem a floresta, Manaus apresentaria um clima que tornaria mais difícil sua habitação (CUSTÓDIO, 2011).

Mesmo bem localizada na floresta amazônica, Manaus já apresenta anomalias na distribuição de calor devido as irregulares ocupações do solo. Devendo-se isto a diversos fatores, como: a alta capacidade calorífica dos materiais de construção; a redução da área de superfícies de evapotranspiração e, principalmente, a retenção de radiação de ondas longas devido ao aumento da poluição atmosférica (COSTA, 1992).

Segundo pesquisas realizadas sobre Manaus (AFONSO, 2010; USTÓDIO, 2011; NOGUEIRA, 2007), tendo como base o referencial histórico, as condições econômicas da cidade, as demandas sociais e as características ambientais da cidade, favoreceram para que, ao longo do seu processo de ocupação, sua área urbana perdesse cerca de 65% de cobertura vegetal, sendo que cerca de 20% foram degradadas em menos de 20 anos, entre os períodos de 1986 a 2004.

Em termos de análise de sensação térmica, Manaus apresenta, hoje, temperaturas mais elevadas do que quando ocupava uma área geográfica menor. Segundo dados do Instituto Nacional de Meteorologia, coletados desde 1961, a menor temperatura, registrada em Manaus, foi de 12,1 °C, em 9 de julho de 1989, e a maior chegou a 39 °C, em 21 de setembro de 2015. Sendo as áreas da cidade mais próximas da floresta apresentam maior nível de umidade no ar e

menores valores na taxa de variação da temperatura local, enquanto que nas áreas localizadas mais próximas do centro da cidade apresentam valores inversos (COSTA, 1992).

Esta variação de temperatura em grandes cidades metropolitanas, como a cidade de Manaus, é um fenômeno que está sendo estudado por diversos pesquisadores. Descrito por Costa (1992) como, “uma das mais marcantes modificações meteorológicas provocadas pelo processo de urbanização, é o aumento da temperatura do ar em relação ao seu entorno rural adjacente, conhecido como o efeito da ilha de calor urbana”.

Este fenômeno é característico de todas as cidades e metrópoles. Sua distribuição e intensidade é proporcional ao tamanho da cidade e de como a população se distribui nela. Normalmente as anomalias apresentadas por essas ilhas de calor são mais notáveis em dias de semana, quando as atividades urbanas são mais intensas, mostrando, desta forma, que está diretamente relacionada à poluição atmosférica. Tal variação se deve pelas condições geográficas, hora do dia e a estação do ano. Sendo mais intensa nas condições de céu claro, vento calmo, e na seca, quando os efeitos que amenizam a umidade são reduzidos (COSTA, 1992).

Então, supõe-se que os maiores problemas ambientais existentes em grandes centros urbanos, como a cidade de Manaus, é proveniente da rápida urbanização afetando a qualidade de vida da população, principalmente no que se refere ao estresse térmico.

Diversos estudos (COSTA, 1992; CUSTÓDIO, 2011; NOGUEIRA, 2007), sobre as ilhas de calor em cidades que apresentam climas equatoriais, mostraram que a variação de temperatura em localidades sem a cobertura vegetal, substituídas pelo concreto, apresentam uma grande amplitude de variação em sua temperatura. Tais pesquisas salientam outros fatores responsáveis pela aparição de ilhas de calor que são fatores secundários, pois dependem diretamente de como se procederam as perturbações antropogênicas. Tais fatores são a temperatura do solo, as intensas precipitações no local e o comportamento do vento (COSTA, 1992).

Recentemente, o projeto LBA (Programa de Grande Escala da Biosfera-Atmosfera na Amazônia) descobriu que a floresta faz chover. As gotas precisam de superfícies sólidas para se formarem. Não é difícil de perceber este processo quando se nota a formação de gotas, por meio da condensação, na lateral das garrafas de refrigerantes quando retiradas de um freezer, por exemplo. Logo, para que aja intensas precipitações, a floresta emite vapores orgânicos para a atmosfera que condensam no ar, agindo como “sementes de chuvas” (NOBRE, 2014).

1.5 Modelagem Matemática de um Crescimento Populacional

Todas essas pesquisas, voltadas às intervenções do ecossistema Amazônico (AMORIM, 2017; NOBRE, 2014; NOGUEIRA, 2007), têm como objetivo científico e social de alertar autoridades, empresários e pesquisadores, do risco da floresta Amazônica parar de armazenar carbono, e entre outros fatores. Porém, numa pesquisa, quando se trabalha com dados coletados e análise dos resultados, é necessário proceder com métodos matemáticos para sustentar a argumentação, desde que haja um certo padrão nos dados coletados.

As pesquisas consistem em tomar um problema definido em alguma situação prática situada na realidade, transformá-lo em um modelo matemático e, através dele, procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos de uma situação real. Tal processo é definido como Modelagem Matemática. Definido por Bassanezi (1988) da seguinte forma;

A modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. No processo de reflexão sobre a porção da realidade selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (modelo matemático) que contemplem as relações que envolvem tais argumentos (BASSANEZI, 1988, p.10).

Em termos estruturais, a prática da modelagem matemática apresenta muitas divergências quando se trata do modo como o modelador vai dar procedência às suas atividades de pesquisa. Porém, todos devem seguir a seguinte lógica de base estrutural: medir e/ou contar, analisar os dados, formular hipóteses, propor modelos e validá-los.

Para dar início à modelagem matemática, é necessária a utilização de dados estabelecidos por meio de observações e medições de um determinado fenômeno. Dispondo dos dados em um sistema cartesiano e realizando reajustes lineares, com a finalidade de se achar um padrão. Fica fácil a visualização do fenômeno proposto, propiciando tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação.

Porém, buscar modelos matemáticos, que descrevam, com uma certa precisão, um fenômeno natural, normalmente requer a resolução de sistemas variacionais. Segundo Bassanezi (1988), a partir do momento em que se tem os dados obtidos na pesquisa e mediante a observação de como esses dados variam, é aplicado o ajuste linear que possibilita a formulação de uma equação na qual cada termo depende do anterior, matematicamente:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \quad \text{dado} \end{cases}$$

na qual, x_n e x_{n+i} representam a relação entre o estado variável de x_n e n e x_0 o valor inicial.

Equações que apresentam tais características são denominadas equações de diferenças finitas. Ou seja, o modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem usual por uma linguagem matemática, que no caso são as equações diferenciais. É considerada uma área vastíssima da matemática que abrange também outras ciências. Utilizada como ferramenta básica para resolução de problemas que apresentam muitas variáveis.

A equação a ser utilizada depende apenas do fenômeno a ser estudado. A diferença está na forma como os dados a serem utilizados estão se comportando, ou seja, diante de variações instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações que os descrevem são classificadas como equações diferenciais, mas quando o fenômeno apresenta unidades e elementos distintos, é necessário obter as médias das variações e então as equações do modeladas serão classificadas como equações de diferenças (BASSANEZI, 1988).

Mais especificamente, a equação diferencial obtida por meio da interpolação aplicada aos dados de uma determinada civilização, referentes à sua demografia em determinados anos, será voltada à área de dinâmica populacional. Normalmente modelos de tais dinâmicas apresentam como base a seguinte estrutura:

$\frac{dP}{dt}$: derivada da população em relação ao tempo (variação contínua)

ou

$P(t_2) - P(t_1)$: Diferença da população em tempos distintos (variação discreta)

$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$: Variação média de uma população

O modelo matemático da dinâmica de uma determinada população permite realizar previsões sobre a mesma e planejar ações. Porém, suas previsões obtidas, através das soluções da equação diferencial, ou equação de diferenças, são apenas aproximações do que viria ser a realidade, pois, todo fenômeno apresenta uma quantidade muito grande de especificidades, ou seja, um problema real não pode ser representado em toda sua complexidade por uma equação matemática, ou um sistema de equações, que consideram apenas algumas de suas variáveis, fazendo com que a aproximação da proposta de solução esteja diretamente relacionada com o que se vai considerar no fenômeno e com as hipóteses formuladas a partir dele.

Durante a aplicação da modelagem matemática no crescimento populacional, em uma determinada civilização, considera-se diversos fatores, como: a taxa de natalidade e mortalidade, todo o contexto histórico da cidade que explicará a variação nas taxas de crescimentos anuais, o tamanho da população (se é muito grande ou muito pequena), os índices de migração, históricos de doenças infecciosas e etc (BASSANEZI, 1988).

Atendendo a isto, conclui-se que a equação gerada pela interpolação dos dados do IBGE da cidade de Manaus, apresentará uma solução particular quando comparada com o crescimento de qualquer outra cidade, pois cada civilização cresce, ou decresce, de uma forma específica, por conta de diversos

fatores que integram a localização, a cultura e a economia de cada cidade. Com isso, foram desenvolvidos diversos modelos de dinâmicas populacionais por diferentes matemáticos em diferentes épocas e lugares.

Um dos primeiros a estudar e determinar um modelo de crescimento populacional, utilizando equações diferenciais, foi Thomas Robert Malthus, em 1798. Seu modelo não considerava fatores limitantes, como guerras ou epidemias, mas considerava que as pessoas eram idênticas em comportamento, fazendo com que seu modelo apresentasse um crescimento intrínseco constante, desprezando diversas variáveis. Porém, seu modelo possui grande relevância na contribuição de novos modelos, que consideram uma maior quantidade de variáveis e outros fatores inicialmente desprezados por Malthus. Como o modelo de Verhurst, que, ao contrário do modelo de Malthus, apresenta um crescimento variante com um limite de crescimento (MAGALHÃES, 2012).

Considerando que o modelo de Malthus apresenta um crescimento populacional intrínseco e assumindo P como um valor inicial para a população, temos como equação diferencial a equação 1.

$$\frac{dP}{dt} = rP \quad (1)$$

na qual r é a constante intrínseca de crescimento populacional e P é o valor da população que varia em função do tempo.

O modelo de Verhurst apresenta um crescimento variante, considerando fatores inibidores com um limite máximo de crescimento. Então, o modelo de Verhurst possui uma taxa decrescente linear simples, apresentando-se na equação 2 sua forma algébrica.

$$\frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{K} \right) P \quad (2)$$

na qual, K é o valor de saturação de uma população.

Os modelos de Malthus e Verhurst continuam sendo melhor definidos, pois, ao passar do tempo, o avanço da tecnologia e o surgimento de novas doenças, as civilizações se deparam com novos costumes, novas maneiras de se pensar,

e de se viver, influenciando diretamente no desenvolvimento e no crescimento populacional.

Relacionado isto ao fato de que cada população cresce segundo suas particularidades, e, dessa forma, apresentam um alto nível de complexidade, finda que, ao aplicar um destes modelos de dinâmica populacional para modelar o crescimento de uma determinada população, pode-se obter uma equação que apresenta uma péssima aproximação ou que não apresenta como solução analítica uma equação diferencial fácil de se resolver. Para isso, utilizam-se métodos numéricos iterativos que surgiram da necessidade de se resolver equações diferenciais com um alto nível de complexidade, que, quando são resolvidas, os resultados obtidos são classificados como solução numérica.

1.6 Método Numérico Runge-Kutta de quarta ordem

A aplicação de métodos numéricos, para a resolução de equações diferenciais, se tornam cada vez mais necessários quando se tenta modelar equações que descrevam problemas do mundo real, apresentando muitas componentes variacionais, fazendo com que a complexidade da equação diferencial torne muito difícil de se obter alguma solução analítica. Segundo Sterza (2016):

As soluções das equações devem respeitar o aspectos mais relevantes no comportamento do problema modelado, no entanto, muitas vezes não é possível justificar a utilização de hipóteses simplificadoras que modificam a natureza do problema, tal como a linearidade, que tornariam possível a determinação de uma solução exata. Isso quer dizer que não se pode forçar um problema a satisfazer hipóteses que permitiria a obtenção da solução exata, por esse motivo se faz necessário a utilização de métodos numéricos (STERZA, 2016, p. 13).

Na verdade, a maioria das equações diferenciais são resolvidas por meio de recursos computacionais, pois existem poucos métodos analíticos que são aplicáveis a poucos modelos de equações diferenciais, limitando assim a obtenção de soluções para diversos problemas.

Os resultados obtidos, mediante a aplicação de métodos numéricos, apresentarão erros mínimos, de forma que, a solução do problema será caracterizada por um conjunto de números, exatos ou aproximados. Também sendo possível o cálculo do erro cometido, permitindo, desta forma, julgar a aproximação do método (LANCHES, 2007).

A aplicação de métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais de problemas de valor inicial, apresenta como proposta de resolução a utilização de diferenças finitas, tendo como raciocínio a discretização do domínio e a substituição das integrações, apresentados no problema, por aproximações associadas ao valor numérico da função.

Ao se buscar a solução de uma equação diferencial, numericamente, o problema tem que apresentar um valor inicial e o domínio $[a,b]$, em que se deseja obter a solução, podendo ser decidido pelo método ou ser ajustado ao número de pontos. O domínio pode ser dividido em m subintervalos com h de comprimento, formando assim, um conjunto de pontos. Um dos métodos numéricos mais utilizados é o método de Runge-Kutta (RK) de quarta ordem, criado a partir da necessidade de se analisar uma grande quantidade de dados. Sendo a ordem do método definida pelo número de subintervalos utilizados para determinar a inclinação (i) da função (STERZA, 2016).

O método de RK faz uso da Série de Taylor para se obter aproximações das derivadas presentes nas equações, sendo baseado no modelo de métodos de passo simples, sujeito a condição inicial. Dessa forma, o método de RK de quarta ordem é dado por:

Seja a e $b \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,3, \dots, m$ e $h = \frac{a-b}{m}$, temos:

$$x_i = a + ih$$

na qual, m é o número de subintervalos em $[a,b]$ e h é o comprimento de cada intervalo.

O método de RK de quarta ordem apresenta-se na equação 3 sua estrutura algébrica, com suas respectivas equações de recorrência.

$$y_{i+1} = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3)$$

em que,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Sendo seu erro de truncamento obtido mediante a fórmula:

$$\frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\delta)$$

na qual, $\delta \in [x_i, x_{i+1}]$ e $y^{(5)}$ a quinta derivada da solução inicial.

A solução do método é apresentado por meio de um conjunto de pontos que se aproximam da função que viria ser a solução. Sua aplicação considera o formato da equação diferencial 4.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (4)$$

O método numérico de RK de quarta ordem é o mais utilizado no cálculo de aproximações de equações diferenciais, pois é um método que sempre apresenta melhores aproximações e não precisa de integração numérica. Porém, para se obter resultados precisos e coerentes, é necessário realizar uma boa discretização do problema e saber substituir as aproximações do problema em questão.

1.7 A utilização do software STELLA para a aplicação de modelos de crescimento populacional

A partir da crescente necessidade de se obter em soluções numéricas, de problemas cada vez mais complexos que vêm surgindo em diferentes áreas das ciências, foram criados diversos softwares interativos com a capacidade de se obter em soluções aproximadas de problemas do mundo real, sendo tal processo classificado como simulação do que vem ser a realidade. Grande parte desses softwares utilizam, em sua matriz lógica, o método de RK de quarta ordem para poder obter os dados da solução. Tendo como um exemplo o software interativo STELLA (Structural Thinking Experimental Learning Laboratory With Animation).

STELLA é um software que permite uma modelagem quantitativa, usando, em sua estrutura, uma metáfora de tanques, válvulas e canos. Sendo que o tanque representa o valor inicial, podendo crescer ou decrescer, a válvula é responsável pela taxa de variação do sistema, e os canos são responsáveis por interligar as variáveis e as constantes, possibilitando uma relação. Dessa forma, como o STELLA funciona a partir da interação entre esses ícones, finda que não é necessário um conhecimento prévio de modelagem computacional para se utilizar o software, permitindo a construção de modelos de dinâmicas populacionais sem precisar formular a equação diferencial em si.

O STELLA é considerado um sistema muito flexível por apresentar diagramas animados, gráficos e tabelas. Sua aplicação vai além de construções de equações diferenciais para pesquisas científicas, o programa também é utilizado em salas de aula com a finalidade de formar um pensamento dedutivo e sistêmico nos alunos, já que o programa funciona com a construção de modelos a partir da relação e conexão entre seus ícones. Segundo Xavier (2003), o programa “permite que o estudante analise como as variáveis afetam umas às outras e compreenda o comportamento do sistema em estudo como um todo”.

O programa permite a livre escolha do usuário de optar que o programa utilize outro método numérico para realizar os cálculos, pois além do RK de quarta ordem, o mesmo possui o RK de segunda ordem e o método de Euler. Porém, a diferença se aplica apenas no tempo de processamento dos cálculos, pois os resultados são numericamente próximos. Seu tempo de processamento está relacionado aos modelos, pois o método de Euler requer o cálculo de derivadas, o que acaba causando um processamento mais lento por conta da quantidade de cálculo.

A utilização do software para a modelagem de um crescimento populacional tem bastante relevância, pois permite realizar comparações com outros modelos e verificar qual melhor se aplica ao intervalo de tempo considerado, além de possibilitar a relação e a visualização os resultados obtidos, fazendo com que a busca por melhores aproximações lembre conceitos já esquecidos, como derivadas

2. METODOLOGIA DA PESQUISA

Tratando-se de uma pesquisa que lida com uma ampla análise de dados, indicadores, tendências e que visa relacionar resultados numéricos, descartando dados sem interesse estatístico, pode-se dizer que a pesquisa é quantitativa e não qualitativa. Segundo Gressler (2004):

A abordagem quantitativa caracteriza-se pela formulação de hipóteses, definições operacionais das variáveis, quantificação das modalidades de coleta de dados, informações e utilização de tratamentos estatísticos (GRESSLER, 2004, p. 42).

A presente pesquisa foi realizada com dados coletados na cidade de Manaus, que está localizada na parte central da Amazônia Brasileira, na foz do Rio Negro, afluente do Rio Amazonas, apresentando a latitude de 3°06'06''S e longitude de 60°01'29''O com 20 metros de altitude acima do nível do mar, segundo a mais nova atualização da World Geodetic System (WGS-84). Na Figura 1, apresenta-se a cidade de Manaus vista por um satélite no ano de 2016.

Figura 1: Manaus



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manaus-Satelite-2016.jpg>

Os dados utilizados na pesquisa referem-se às variáveis de quantidade da população de Manaus e temperatura diária retirados dos censos do IBGE e INMET, respectivamente.

Manaus comporta um pouco mais de 2,1 milhões de habitantes, segundo o Censo Demográfico do IBGE, sendo considerada a cidade mais populosa da Região Norte. Na Tabela 1, estão os dados referentes à população da cidade de Manaus entre os anos de 1960 e 2017.

Tabela 1: Dados Populacionais de Manaus.

ANO	POPULAÇÃO
1960	175.343
1970	314.197
1980	642.492
1991	1.010.544
2000	1.403.796
2010	1.802.014
2017	2.130.264

Fonte: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/am/manaus/panorama>.

A cidade de Manaus apresenta um clima tropical úmido, sendo sua temperatura média anual de 27,4 °C. Devido à sua proximidade da cidade à linha do equador, a cidade apresenta uma variação diária de temperatura elevada, quando comparada a outras cidades do restante do país.

Contudo, em razão da cidade ser no coração da floresta Amazônica, Manaus apresenta uma umidade do ar relativamente elevada, fazendo com que as variações médias anuais de temperatura sejam menores do que seriam para um ar mais seco, podendo-se verificar mediante os dados baixados do banco de dados do INMET, na Tabela 2.

Tabela 2: Dados de Temperatura Média da Cidade de Manaus.

ANO	Mínima Média (°C)	Média (°C)	Máxima Média (°C)
1970	23,08	25,95	30,08
1980	23,48	26,65	29,00
1991	23,50	26,84	31,80
2000	22,94	26,31	29,34
2010	23,84	27,70	31,72
2017	24,40	28,10	32,00

Fonte: <http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=bdmep/bdmep>.

Os dados de temperatura, presentes na Tabela 2, são resultados de cálculo aritmético ($\sum T/365$) dos dados diários baixados do INMET. Salvo os anos bissextos de 1980 e 2000 ($\sum T/366$).

Mediante a relação dos dados do ano e a taxa de crescimento populacional, será gerada, por meio da interpolação, uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dP}{dt} = f(P) \quad (5)$$

Para resolver a equação 5, será utilizado o Método Numérico de RK de quarta ordem (apresentado na seção 1.6), que irá calcular uma aproximação da solução real. Tal método será utilizado pelo fato de o mesmo apresentar um dos menores erros acumulados e por não se exigir o cálculo de integrais, facilitando, desta forma, o cálculo.

A nível de comparação, serão aplicados os modelos mais clássicos de crescimento populacional, que são os de Malthus e de Verhurst, no software STELLA, que irá permitir a construção de uma tabela com os dados obtidos pelos três métodos, verificando, desta forma, a aproximação dos métodos, e sua interação, quando utilizados para modelar o crescimento populacional da cidade de Manaus, validando, desta forma, o uso do RK de quarta ordem. Além disso, será determinada a solução analítica, se a mesma existir.

Com os dados de população e temperatura, gerar-se-á um gráfico que irá possibilitar relacionar o crescimento populacional da cidade de Manaus com suas temperaturas médias anuais, que, por meio da interpolação dos dados, apresentará a forma da equação 6.

$$T = T(P) \quad (6)$$

na qual T é a temperatura média anual e $T(P)$ é a função que depende da população. Tendo em vista que o crescimento populacional depende do tempo, conclui-se que a equação 5 está indiretamente relacionada com o tempo.

Utilizando os dados obtidos por RK de quarta ordem e a equação 6, será possível obter os dados da população e a temperatura média anual em três

cenários, sendo eles em 2030, 2050 e 2070. Tendo como finalidade de observar a coerência dos valores obtidos para que seja possível definir novos parâmetros, permitindo desenvolver resultados com melhor aproximação dos valores reais. Tais parâmetros serão definidos por meio do método da tentativa e do erro.

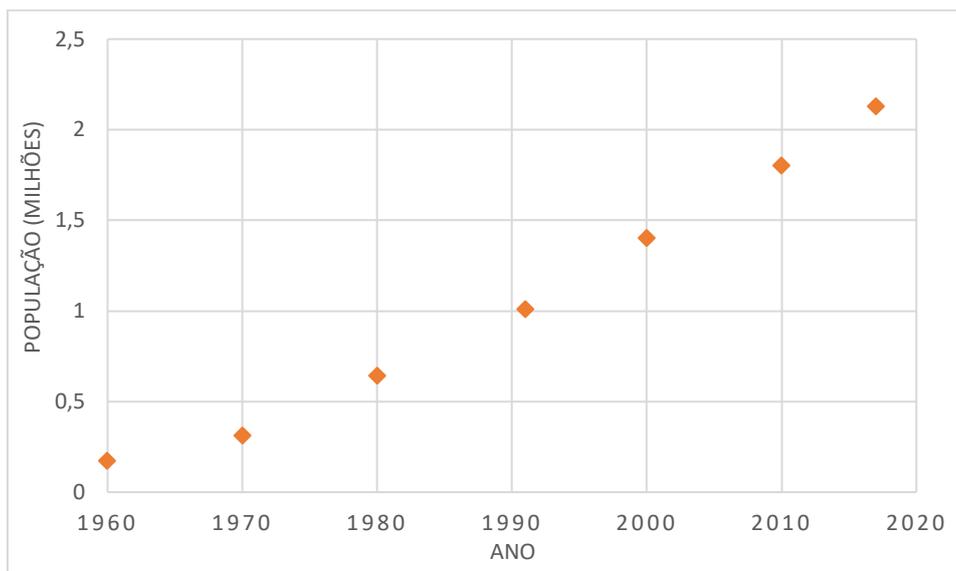
Mediante os dados obtidos pelo método, será realizada uma extrapolação da relação dos dados de temperatura e do crescimento populacional, que permitirá a visualização do crescimento populacional além dos dados fornecidos pelo IBGE.

3. DESCRIÇÃO DA PESQUISA

3.1 Taxa de Variação do Crescimento Populacional

Por meio dos dados populacionais da cidade de Manaus (Tabela 1), obtidos no site do IBGE, foi gerado o gráfico do crescimento populacional que se encontra na Figura 2.

Figura 2: Gráfico dos dados populacionais



Fonte: Autor (2018)

A partir dos dados populacionais, foram obtidos, por derivadas em diferenças finitas centradas, a taxa de variação em que a população cresce. Na Tabela 3, apresentam-se os resultados dos cálculos de $\frac{dP}{dt}$ (População/Ano).

Tabela 3: Dados da Taxa de Crescimento.

ANO	POPULAÇÃO	TAXA DE VARIAÇÃO
1970	314.197	23.334,50
1980	642.492	33.159,40
1991	1.010.544	38.065,20
2000	1.403.796	41.656,30
2010	1.802.014	42.733,40

Fonte: Autor (2018)

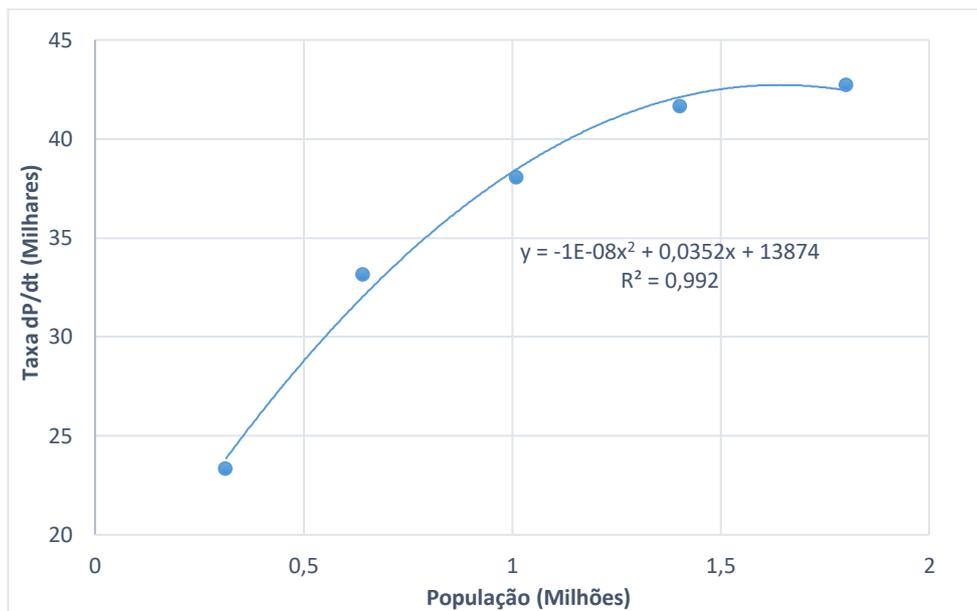
Os dados da taxa de variação foram obtidos da seguinte forma:

Com base na Tabela 1, dados dois censos, o de 1960 e 1980 que são, respectivamente 175.802 e 642.492, a taxa de variação no ano de 1970 é obtida por:

$$\frac{dP}{dt}(1970) = \frac{P(1980) - P(1960)}{1980 - 1960} = \frac{642.492 - 175.802}{20} = 23.334,5$$

Relacionando os dados da Tabela 3, foi gerado o gráfico presente na figura 3:

Figura 3: Gráfico da taxa de variação



Fonte: Autor (2018)

A equação gerada apresentada na Figura 3 é a equação 7, que será resolvida pelo método numérico RK de quarta ordem.

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^2 + \beta P + \gamma \quad (7)$$

na qual,

$$\alpha = -1,00 \cdot 10^{-8}$$

$$\beta = 35,2 \cdot 10^{-3}$$

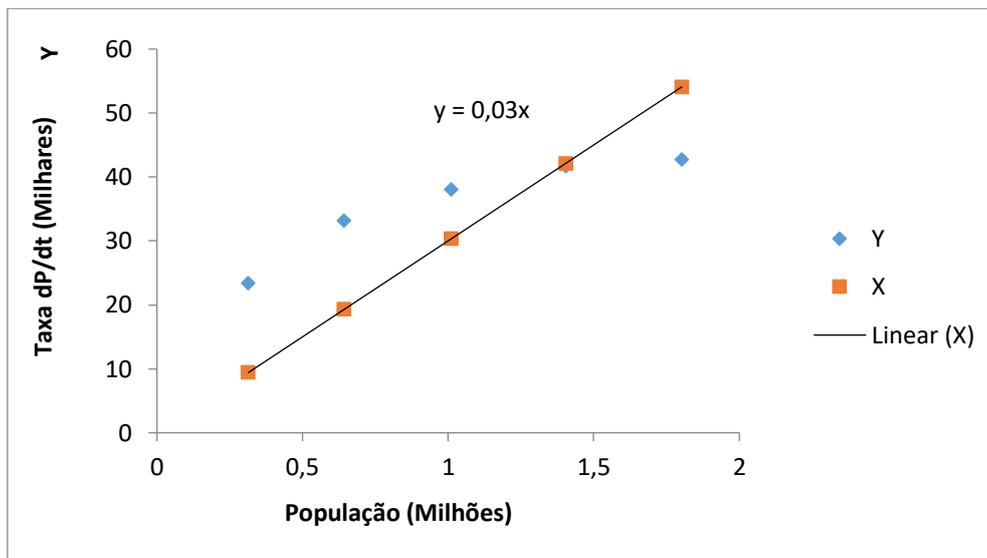
$$\gamma = 13.874$$

3.2 Constante Intrínseca de Crescimento

Para a aplicação dos modelos de Malthus e Verhurst no STELLA, foi necessário obter a constante de crescimento intrínseco da população de Manaus, pois a construção do modelo no STELLA requer uma taxa de crescimento para a válvula de entrada do tanque.

A constante foi obtida por meio do gráfico da Figura 4, gerada a partir da interpolação dos dados da taxa de variação da população incluindo o centro do sistema cartesiano.

Figura 4: Constante intrínseca de crescimento



Fonte: Autor (2018)

O gráfico da Figura 4 apresenta as taxas de crescimento como Y, e as taxas obtidos por meio da regressão linear considerando a constante nula. Desta forma, por meio da interpolação dos dados, apresenta-se a equação 8.

$$\frac{dP}{dt} = \varphi P \quad (8)$$

na qual,

$$\varphi = 0,03$$

Mediante a observação do gráfico da Figura 4, verifica-se que a equação obtida por meio da regressão, não apresenta uma boa aproximação, podendo, dessa forma, concluir que a constante de crescimento populacional, gerada pela equação 8, não apresentará condições de gerar soluções com uma boa aproximação, sendo estas provenientes da aplicação dos modelos no STELLA.

3.3 Equação da Variação de Temperatura

A partir dos dados de temperatura média anual obtidos do INMET e os censos populacionais baixados pelo site do IBGE, foi gerada a Tabela 4.

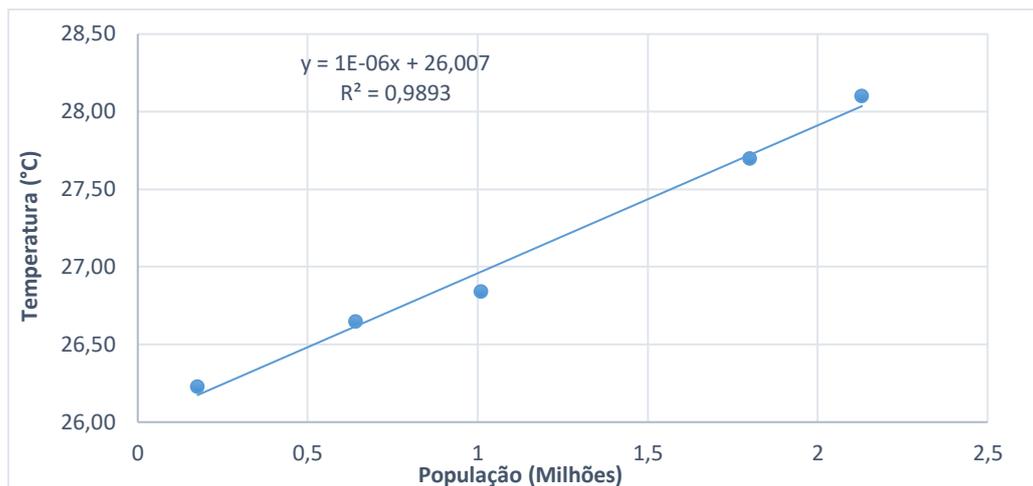
Tabela 4: Dados Populacionais e de Temperatura.

Ano	População	Temperatura (°C)
1960	175.802	26,23
1970	314.197	25,95
1980	642.492	26,65
1991	1.010.544	26,84
2000	1.403.796	26,31
2010	1.802.014	27,70
2017	2.130.264	28,10

Fonte: Dados do IBGE e INMET.

A partir da Tabela 4, foi gerado o gráfico (excetuando os anos anômalos) apresentado na Figura 5, que apresenta a equação proveniente da interpolação dos resultados obtidos.

Figura 5: População e temperatura



Fonte: Autor (2018)

Pela Figura 5, verifica-se que aparecem apenas cinco dados de temperatura. Isso se deve pelo fato de nos anos 1970 e 2000 apresentarem valores anômalos, que foram retirados, e, dessa forma, a temperatura cresce linearmente com a população.

A equação apresentada pelo gráfico da Figura 5, tem como estrutura algébrica a equação 9.

$$T = \delta P + \epsilon \quad (9)$$

Na qual,

$$\delta = 1,00 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon = 26,0$$

Pela equação 7 obter-se-á a população para anos futuros e, relacionando esses resultados com a equação 9, poder-se-á prever a temperatura média anual para anos futuros em Manaus.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Solução Analítica da Equação Diferencial

A equação diferencial 7 gerada pela relação dos dados da taxa de crescimento populacional (dP/dt) apresenta como solução analítica, a equação 10, como uma solução particular. Tendo $t=0$ como condição inicial.

$$\frac{P - 2,92 \cdot 10^6}{P - 5,25 \cdot 10^4} = e^{2,87 \cdot 10^3 \cdot t} - 23,6 \quad (10)$$

A equação 10 apresenta um crescimento exponencial, sendo, a princípio, coerente, pois, segundo os dados do IBGE, a população da cidade de Manaus apresenta uma taxa de crescimento bastante alta, semelhante à função exponencial, fazendo com que, no início da simulação, a equação 10 apresente uma boa aproximação dos dados do IBGE. Porém, a partir de um certo momento, seus valores obtidos, conforme o passar do tempo, começam a apresentar diferenças muito grandes aos dados do IBGE, resultando numa péssima aproximação.

Por apresentar um crescimento irregular em determinados períodos, a modelagem para o crescimento populacional da cidade de Manaus se deu de forma complexa, tornando o processo mais trabalhoso.

4.2 Aplicação dos Modelos de Malthus e Verhurst no STELLA

Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhurst foram aplicados juntos no software STELLA, pelo fato dos dois apresentarem a mesma constante intrínseca de crescimento, e uma lógica semelhante em sua modelagem, tendo diferença apenas na variável de inibição, presente no modelo de Verhurst.

A construção do modelo de Malthus tem como base lógica a equação 1, que requer apenas a constante intrínseca r , obtida por meio da constante φ da equação 8, o modelo considera apenas um crescimento que depende de dados anteriores, sem considerar variáveis de inibição.

A estrutura lógica de Malthus no STELLA, presente na Figura 6, apresenta apenas uma válvula de entrada que está ligada tanto ao tanque, que apresenta

o valor inicial, quanto à constante intrínseca, possibilitando, desta forma, a interação entre os dois.

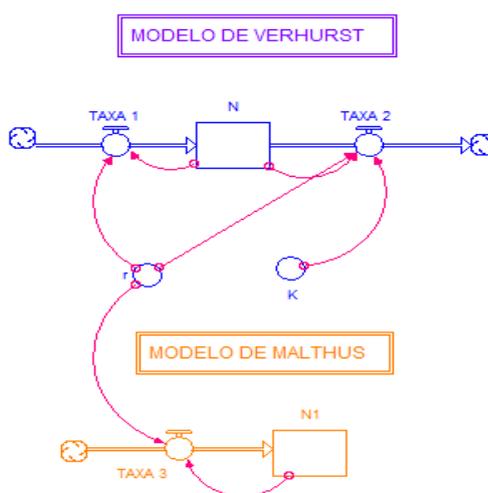
Porém, ao ser aplicado no STELLA a constante de crescimento intrínseco r , a mesma apresentou soluções com um nível de aproximação muito ruim. Logo, foi aplicado o método da tentativa e do erro, gerando uma nova constante $r = 0,059$, possibilitando uma nova solução com uma melhor aproximação.

Já a construção do modelo de Verhurst no STELLA mostrou-se ser mais complexa, pois foi necessário definir o nível de saturação (K) da cidade de Manaus, sendo obtido por meio dos dados obtidos pelo método numérico RK de quarta ordem, que, mediante a análise dos valores obtidos, definiu o nível de saturação no ano de 2070, quando a população atingiu o valor de 3.719.431 de habitantes.

Como o modelo de Verhurst considerava variáveis de inibição, sua estrutura lógica no STELLA, apresenta duas válvulas, a de entrada (TAXA 1), conectada à mesma constante de crescimento intrínseco r de Malthus, e a de saída (TAXA 2), que está ligada à constante K (saturação da população da cidade de Manaus).

A estrutura lógica dos modelos no STELLA apresentam-se na Figura 5.

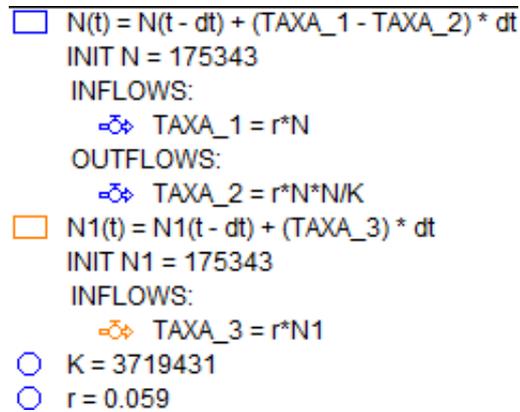
Figura 6: Construção no STELLA



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 6, apresenta-se a estrutura algébrica de cada componente do sistema presente na Figura 5, verificando-se as equações diferenciais.

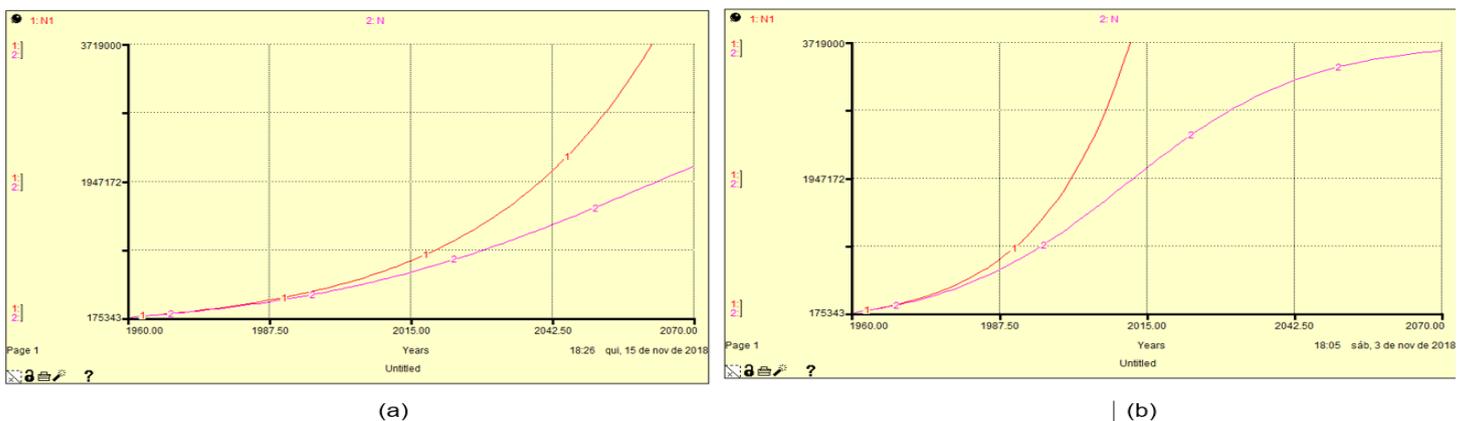
Figura 7: Estrutura no STELLA



Fonte: Autor (2018)

Tendo em vista que o STELLA é um programa que permite mostrar o gráfico de qualquer componente da estrutura algébrica, foi relacionado o crescimento populacional da cidade de Manaus definido por Malthus (N1) e por Verhurst (N), com a finalidade de se obterem os dados populacionais, e, dessa forma, compará-los com os dados do IBGE e de RK de quarta ordem, justificando a escolha da utilização do método numérico RK de quarta ordem para a resolução da equação 7. Os gráficos apresentam-se na Figura 8.

Figura 8: (a) antes do ajuste; (b) depois do ajuste



Fonte: Autor (2018)

Por meio do gráfico presente na figura 7, verifica-se a eficiência do ajuste da constante de crescimento intrínseco, obtendo, dessa forma, valores mais próximos ao do IBGE, sendo melhor observado na Tabela 5.

4.3 Comparação dos Dados Obtidos

Mediante os valores obtidos por Malthus, Verhurst e RK de quarta ordem foi gerada a Tabela 5, comparando-os com os dados do IBGE.

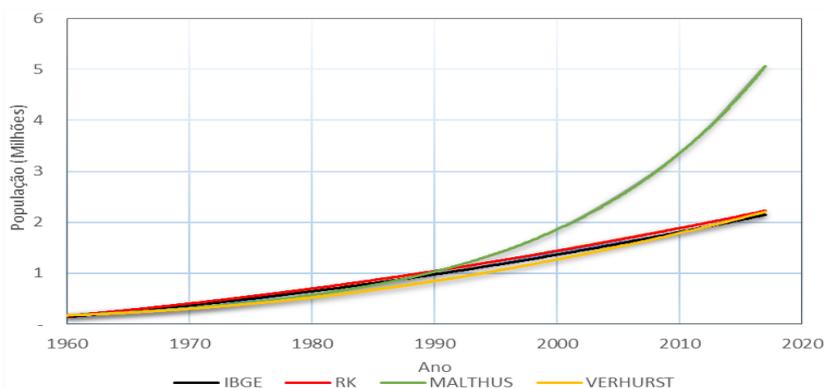
Tabela 5: Comparação entre os dados obtidos pelos métodos com os do IBGE.

ANO	IBGE	RK	Malthus	Verhurst
1960	175.802	175.802	175.802	175.802
1970	314.197	396.257	316.317	304.766
1980	642.492	684.239	570.632	515.813
1991	1.010.544	1.077.033	1.091.976	876.073
2000	1.403.796	1.453.929	1.857.049	1.278.835
2010	1.802.014	1.899.255	3.350.094	1.807.386
2017	2.130.264	2.206.549	5.063.148	2.187.930
Erro médio (%)		7,38	38,75	6,77

Fonte: Autor (2018)

Aplicando a interpolação nos dados da Tabela (5) o gráfico apresentado na Figura 4, que permitiu comparar e analisar as aproximações dos métodos.

Figura 9: Comparação entre os métodos



A Figura 9 mostra a comparação dos dados obtidos no site do IBGE com os resultados obtidos por RK, Malthus e Verhurst, desta forma, possibilita a

aplicação da regressão linear para determinar a aproximação de cada método dos dados do IBGE, por meio do coeficiente de determinação (R^2). Verificou-se que o R^2 de Malthus é de 0,931723, o de Verhurst é de 0,995649 e o de RK é de 0,9995153, concluindo-se que o método com melhor aproximação é o RK de quarta ordem.

Mediante o gráfico da Figura 9 e os dados das taxas de crescimento, presentes na Tabela 3, verifica-se que as maiores taxas de crescimento populacional na cidade de Manaus, foram entre 1960 e 1980. Devendo-se isso ao fato de que sua expansão demográfica tenha sido intensificada a partir de 1967, por conta da implantação da Zona Franca de Manaus, o que ocasionou da vinda de pessoas de diversas áreas do país, e até de fora.

Porém, mesmo com a implantação do novo polo industrial, que já recebia incentivos de empresas desde de 1961, Manaus continuava sofrendo com um padrão de economia extrativista, semelhante ao do período da borracha, não permitindo com que a cidade apresentasse planejamento e ações capazes de suprir as necessidade que surgiram com a alta taxa de crescimento demográfico no período, culminando em uma ocupação territorial desordenada.

4.4 Cálculo dos Dados Populacionais por RK

Para se obter valores futuros que permitam analisar o comportamento da variação da temperatura média anual, aplicou-se o método numérico RK de quarta ordem, tendo como valores iniciais os dados da Tabela 5, obtendo-se os valores da população e temperatura média anual nos anos de 2030, 2050 e 2070, da seguinte forma:

Cenário 1

Para o ano de 2030:

Utilizando o resultado obtido por RK do ano de 2017 como valor inicial, temos:

$$P(70) = 2.742.962$$

Aplicando o resultado obtido na equação 7, temos:

$$T(2.742.962) = 1.10^{-6}.2.742.962 + 26 = 28,7$$

Cenário 2

Para o ano de 2050:

Utilizando o resultado obtido por RK do ano de 2030 como valor inicial, temos:

$$P(90) = 3.397.241$$

Aplicando o resultado obtido na equação 7, temos:

$$T(3.397.241) = 1.10^{-6}.3.397.241 + 26 = 29,4$$

Cenário 3

Para o ano de 2070:

Utilizando o resultado obtido por RK do ano de 2050 como valor inicial, temos:

$$P(110) = 3.719.431$$

Aplicando o resultado obtido na equação 7, temos:

$$T(3.719.431) = 1.10^{-6}.3.719.431 + 26 = 29,7$$

Diante dos dados obtidos e tabelados (Tabela 6) é possível verificar o aumento na temperatura média anual ao se aplicar os valores estimados da população para os cenários 1, 2 e 3. Chegando a aproximadamente 29,7 °C no ano de 2070.

Tabela 6: Estimativas de população e temperatura obtidos por RK para Manaus para os cenários 1, 2 e 3.

ANO	TEMPO (t)	POPULAÇÃO	TEMPERATURA MÉDIA ANUAL (°C)
2030	70	2.742.962	28,7
2050	90	3.397.241	29,4
2070	110	3.719.431	29,7

Fonte: Autor (2018)

É importante frisar que os dados obtidos por RK, presentes na Tabela 6, são médias anuais de todo território urbano e rural, sendo o meio rural responsável por manter a temperatura média anual relativamente baixa, quando comparada com as temperaturas médias no centro da cidade, o que implica ressaltar que a cidade apresenta uma ampla variação de temperatura quando confrontado com o meio rural, devido aos diversos materiais de construção que apresentam uma alta capacidade calorífica. Em 2017, por exemplo, houve dias em que a temperatura média diária no meio urbano atingiu 32,0 °C, segundo a Tabela 2.

4.5 Análise dos Dados da Temperatura Obtidos pela Aplicação dos Dados Populacionais na Equação 7

Pela Tabela 6, verifica-se que de 2030 a 2050 a temperatura média anual da cidade de Manaus irá variar aproximadamente 0,7 °C e entre 2050 e 2070 a variação será de aproximadamente 0,3 °C. O que indica menores variações na temperatura ao passar dos anos, apresentando características de um crescimento logístico, no qual tende a diminuir, a partir do ponto de inflexão, a taxa de crescimento até um nível em que a função se estabiliza, devendo-se isto ao nível de saturação da população de Manaus.

Um modelo que apresenta um crescimento similar, é o modelo de Verhurst, que considera uma taxa variável, decrescente e linear, ou seja, a cidade de Manaus irá crescer até atingir um limite máximo, devido às inibições naturais presentes no crescimento de Manaus, como a taxa de mortalidade, a emigração, a taxa de natalidade e etc.

Salvo o fato de que a variação de temperatura média de uma cidade, não depende do seu crescimento populacional, ela pode ser definida a partir da imposição dos sistemas atmosféricos regionais, que são causados, principalmente, pela verticalização da topologia urbana, aumentando sua rugosidade, e o lançamento acumulado de partículas e gases para a atmosfera pelos veículos e indústrias. Desta forma, mesmo que a população pare de crescer e se estabilize, a variação de temperatura média anual pode continuar a aumentar, mesmo com uma taxa de variação menor, por conta das intervenções

causadas no solo que já modificaram todo um ecossistema que o mesmo tinha com a atmosfera, afetando o nível de umidade do ar (SAYDELLES, 2005).

As mudanças no ecossistema local causados pelo desmatamento da floresta amazônica implicam, não somente na mudança do clima local, mas também apresenta certa relevância no clima global. Sabe-se que a floresta tem uma grande atuação no ciclo hidrológico e no armazenamento de carbono, e, com isso, a mesma é responsável por levar umidade para localidades além de seus limites, devendo isto à circulação atmosférica que é diretamente influenciada pela atuação da floresta no ciclo hidrológico. Ou seja, a atuação da floresta amazônica como uma “bomba biótica de umidade” tem grande relevância no clima global, sendo que seu funcionamento está diretamente relacionado ao poder de evapotranspiração da floresta.

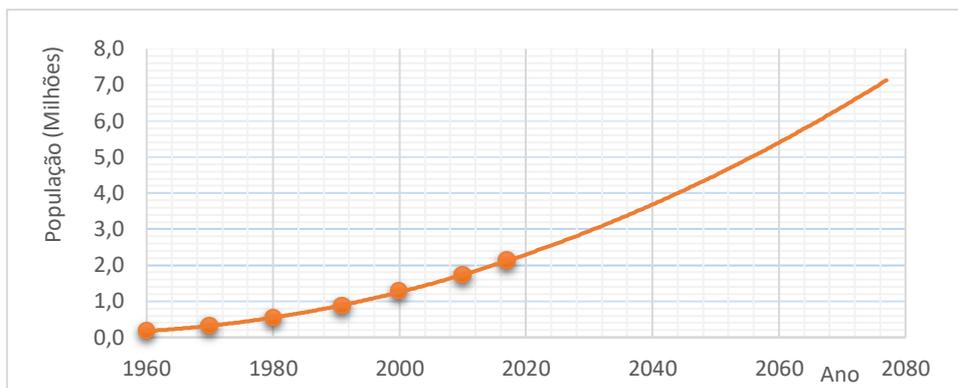
Em relação à forma de ocupação do solo, uma pesquisa voltada ao estudo de ilhas de calor na cidade de Manaus, realizada por Custódio (2012), comprovou que “o crescimento vertical não é tão ostensivo na mudança da temperatura do ar quanto o desmatamento e crescimento horizontal, por deixar a maior parte do solo exposto”. Verificando que, durante o dia, a zona leste (ZL) apresenta maiores temperaturas quando comparada às outras zonas, pelo fato de que a zona apresenta a maior área com ocupações irregulares, que continua crescendo horizontalmente. Diferente da zona sul (ZS), que apresenta um maior crescimento vertical e menores variações de temperatura durante o dia.

São diversos os fatores, provenientes do desmatamento na região da cidade de Manaus, que influenciam na variação da temperatura na parte urbana da cidade de Manaus. Uma delas seria a relação direta com os regimes de chuvas e o comportamento do vento na cidade de Manaus, pois ambas tem a função de redistribuir o calor na região, dificultando grandes variações de temperatura, originadas pela incidência de grande quantidade de calor no solo de concreto e asfalto.

4.6 Extrapolação dos Dados Populacionais Obtidos por RK

Realizando uma extrapolação dos dados da Tabela 4, pode-se observar como que se procede o aumento populacional até o ano de 2070. Apresentando-se na Figura 6.

Figura 10: Extrapolação dos dados obtidos



Fonte: Autor (2018)

Em contrapartida à análise da Tabela 6, quando se aplica a extrapolação nos dados populacionais obtidos por RK, presentes na Figura 6, verifica-se que à medida em que a população cresce, sua taxa de variação aumenta, pois a função, gerada por meio da interpolação, cresce a partir de uma função quadrática, proporcionando uma taxa de variação crescente, e não estacionária, interferindo-se diretamente no aumento da temperatura local.

Desta forma, o aumento na variação de temperatura na cidade de Manaus se daria de forma mais intensa ao passar dos anos, o que estaria de acordo com o resultado obtido por Corrêa (2016), que, por meio do estudo da comparação da variação de temperatura entre dois períodos, sendo o primeiro entre 2002 a 2005 e o outro de 2009 a 2012, verificou que a distribuição e a intensidade das ilhas de calor na cidade de Manaus se intensificaram durante o segundo período, justamente, no período em que a população passou de 1.405.835 para 1.802.014, segundo o IBGE. O que indica uma maior variação no aumento da temperatura quando a população apresenta uma alta taxa de crescimento.

Logo, a justificativa da Tabela 6 apresentar uma diminuição na taxa de variação da temperatura, se deve ao fato de que o método de RK prevê uma diminuição na taxa de crescimento da população de Manaus, assim como o

método de Verhurst, que, segundo Corrêa (2016), indica uma influência direta na variação de temperatura, fazendo com que a mesma diminua gradativamente.

Atualmente a cidade de Manaus sofre com diversas formas de ocupação, sendo elas legalizadas ou não. Um dos exemplos é a reserva Adolpho Dulcke, que sofre pelas diversas invasões em seu entorno, causando preocupação com uma possível invasão da reserva.

Atualmente, por conta do processo de urbanização, a região de Manaus e em seu entorno, já apresentam impactos significativos no meio ambiente, como a destruição de nascentes, principalmente na ZL; a ameaça de extinção de espécies nativas; maior vulnerabilidade a problemas de erosão, devido a retirada das árvores, alagamentos e aumento na temperatura devido à falta do solo vegetal, afetando nos regimes de chuvas e, por consequência, na umidade do ar (NOGUEIRA, 2007).

Nas zonas norte e leste, por conta do processo de urbanização ocorrer mais horizontalmente, o crescimento demográfico dá-se diretamente sobre a mata circundante, sucedendo graves problemas de infraestrutura, devido ao fato de a primeira ter surgido por meio de lotes e a segunda por invasões de terras. Tais áreas apresentam uma grande incidência de doenças infectocontagiosas, somados a degradação ambiental. Em sua totalidade, as construções, as avenidas, a própria população, não possibilitam, e nem mesmo se interessam, pelo meio ambiente e pelas implicações que sua degradação acarreta.

4.7 Variações na Temperatura de Manaus Atualmente

Nos últimos anos, a cidade de Manaus apresenta grandes variações em sua parte central, na ZS as altas temperatura ocorrem durante à noite, devido suas construções verticais, e nas zonas leste e norte durante o dia, fazendo com que a população sofra com as altas temperaturas registradas em diversas áreas da cidade, que chega a atingir 40 °C. Mesmo assim, a população e os entes responsáveis pela urbanização e distribuição dos serviços públicos, ainda não investem em soluções que venham amenizar os impactos, causados pela atividade humana no meio ambiente, que interfere diretamente na qualidade de vida da população (CORRÊA, 2016).

É importante salientar, a influência da estrutura urbana no comportamento da variação e temperatura em uma cidade que apresenta clima equatorial, como a cidade de Manaus. Por meio dos resultados obtidos na Tabela 6, que apresentam temperatura médias baixas, quando comparadas às localizadas na parte central da cidade, verifica-se os efeitos da temperatura rural sobre o cálculo da temperatura média anual, pois, mesmo que sejam pequenas as diferenças encontradas, a área urbana apresenta, em todas as horas do dia, valores sempre maiores de temperatura do ar, quando comparadas com a área rural. E ainda, segundo Costa (1992), “já no que se refere à umidade relativa do ar, estes valores foram sempre menores na área urbana em relação a área rural, evidenciando a grande influência das características de uso e ocupação do solo”.

Estas temperaturas anômalas, na parte central da cidade, são as chamadas ilhas de calor, que apresentam, cada vez mais, uma grande intensidade e o surgimento de outras, espalhadas no meio urbano, conforme a cidade se expande.

Logo, o surgimento das ilhas de calor na cidade de Manaus estão diretamente relacionadas com o tamanho da cidade, sua forma física, as atividades humanas, nível de umidade do ar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Logo após a elaboração do plano socioeconômico, em 1960, que atraiu empresas para investir na cidade de Manaus e em outras regiões do estado do Amazonas a população da cidade de Manaus passou por diversos conflitos relacionados à aprovação de leis que “abririam as portas da Amazônia” para o comércio internacional, pois isto ocasionaria na perda de riquezas ambientais e culturais com a vinda de imigrantes de outros países. Neste caso, as relações sociais e o espaço se modificariam, o que implicaria na forma do crescimento populacional.

Por outro lado, a “internacionalização da Amazônia” trouxe benefícios para a população da cidade de Manaus, pois, antes, a cidade era isolada do restante do país, tanto em termos tecnológicos quanto culturais. No período entre 1920 e 1960 Manaus era caracterizada como uma cidade estagnada economicamente, devendo-se isto ao fato de que no período áureo da borracha (1879-1912), a cidade de Manaus evoluiu muito pouco em relação às outras cidades que tinham uma economia mais forte, pois a cidade sofria por depender de uma economia totalmente extrativista, o que, ocasionalmente, resultaria numa ocupação degradante (AFONSO, 2010).

Contudo, verificou-se que a cidade de Manaus apresenta um crescimento populacional relativamente complexo, pois dois períodos de sua história foram marcados por intensas migrações causadas por motivos econômicos e sociais, causando uma disfunção na taxa de variação do crescimento populacional, influenciando diretamente no nível de dificuldade na construção do modelo matemático.

Tendo em vista um crescimento complexo, utilizou-se o método de RK, que possibilita prever os pontos de inflexão no crescimento populacional da cidade de Manaus, o que implica, indiretamente, na previsão do ponto de estabilização na temperatura média anual, prevendo que a temperatura média anual da cidade de Manaus irá parar de crescer junto com a população. Isto se deve ao fato de que a modelagem realizada neste trabalho, buscou relacionar diretamente o crescimento populacional da cidade de Manaus com o aumento na sua variação de temperatura, devido ao surgimento de ilhas de calor em sua

parte central, devido às atividades humanas, que se intensificam conforme sua expansão.

Mesmo com o nível de complexidade alto, obtiveram-se resultados relevantes, com um bom nível de aproximação, devido a aplicação dos modelos mais básicos de crescimento populacional, e os dados do IBGE, que, quando comparado com os dados obtidos por RK, permitiu uma melhor análise da aproximação do método numérico RK de quarta ordem.

Os dados populacionais e de temperaturas obtidos nos três cenários, indicam um crescimento linear na variação de temperatura conforme a população aumenta. Evidenciando, desta forma, a influência direta das atividades humanas na variação de temperatura local. Em consonância com os resultados de Corrêa (2016), o aumento da temperatura média anual se deve principalmente as altas taxas de variação da temperatura nos centros urbanos que apresentam uma maior densidade demográfica, associando isto ao fato de que quanto maior for a área geográfica da cidade menor será a influência da floresta na variação de temperatura no seu centro urbano.

Com isso, pretende-se realizar uma modelagem mais aprofundada em relação ao crescimento populacional de Manaus, obtendo dados que permita a modelagem do modelo de Montrol, com a finalidade de analisar o ponto de inflexão e o nível de saturação da cidade de Manaus com maior precisão.

REFERÊNCIAS

- AFONSO, Lucyanne de Melo. **Panorama da Cidade de Manaus: crise, progresso e cultura década de 1960.** Programa de Pós-Graduação e Sociedade e Cultura na Amazônia (PPGSA). Artigo. Universidade Federal do Amazonas – 2010.
- ALMEIDA, Leonardo de; RODRIGUES, Mariana dos Santos; AGUIAR, Ana Carolina. **Estudo Exploratório da Temperatura do Ar na Cidade de Três Lagoas.** Artigo. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - 2007.
- AMORIM, Tamiris Xavier. **Impactos do Desmatamento Progressivo da Amazônia na Precipitação do Brasil.** Universidade Federal Fluminense – Instituto de Geociências – Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Rio de Janeiro – Niterói – 2017.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Equações Diferenciais com Aplicações.** Coleção BC&T-UFABC. Edit.: Harbra, 1988, S. Paulo.
- CORRÊA, Polari Batista; CANDIDO, Luiz Antonio; SOUZA, Rodrigo Augusto Ferreira de. **Estudo do Fenômeno da Ilha de Calor na Cidade de Manaus/AM: Um Estudo a Partir de Dados de Sensoriamento Remoto, Modelagem e Estações Meteorológicas.** Revista Brasileira de Meteorologia. Artigo. Volume 1. Manaus/AM – 2016.
- COSTA, Antônio Carlos Lôla da. **Estudo da Ilha de Calor Urbana em Cidade ed Pequeno Porte na Região Equatorial.** Artigo. Volum 1. Departamento de Meteorologia. 4f. Universidade Federal do Paraná – 1992.
- CUSTÓDIO, Lady Layane Martins. **Avaliação de Ilhas de Calor na Cidade de Manaus.** Artigo. IV Workshop de Mudanças Climáticas e Recursos Hídricos do Estado de Pernambuco – I Workshop Internacional Sobre Mudanças Climáticas e Biodiversidade – Recife – 2012.
- CUSTÓDIO, Lady Layane Martins. **Variabilidade Temporal e Espacial das Variáveis Meteorológicas em Manaus.** Artigo. 5f. IV Simpósio Internacional de Climatologia – João Pessoa – 2011.

GRESSLER, Alice Lori. **Introdução à Pesquisa: projetos e relatórios**. Revista Atual. 2ªed. 245f. São Paulo: Loyola. 2004.

LANCHES, Lonildo José; FURLAN, Diógenes Coga. **Métodos Numéricos**. Exemplar. 46f. Universidade do Estado do Paraná – Departamento de Informática. Curitiba - 2007.

MAGALHÃES, Mayron Luiz A.; LEITE, Neila M. Gualberto. **Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional**. Artigo. Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC). Nordeste - 2012.

NOBRE, Antonio Donato; SALATI, Enéas; DIAS, Pedro. **Os Rios Voadores, a Amazônia e o Clima Brasileiro**. 22 f. Projetos Rios Voadores. Editora Horizonte, 2014. Rio de Janeiro.

NOGUEIRA, Ana Cláudia Fernandes. **A expansão Urbana e Demográfica da Cidade de Manaus e seus Impactos Ambientais**. Artigo. 8f. XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto. p. 5427-5434. INPE – Florianópolis, 21 a 26 de Abril – 2007.

OLIVEIRA, Flavio Mendes; ARAUJO, Rutenio Luiz; CARVALHO, Joao Luiz; COSTA, Solange Santos. **Determinação da variação no microclima de Manaus/AM por atividades antropogênicas e modulações climáticas naturais**. Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. Editora: Acta Amazônica. Universidade de São Paulo (USP)– 2008.

PINHEIRO, Rildo Figueiredo. **Atividade Física e Ambiente Urbano: lazer e esporte no entorno do igarapé do Mindu – Manaus/AM**. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Ciências do Ambiente e Sustentabilidade na Amazônia. Universidade Federal do Amazonas. Manaus/AM-2009.

SANTANA, Raoni Aquino Silva de. **Estudo do escoamento turbulento atmosférico em diferentes sítios experimentais localizados na Amazônia**. Universidade do Estado do Amazonas (UEA) - Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia (INPA) - Programa de Pós-Graduação em Clima e Ambiente – Cliamb. Tese. Manaus/AM - 2017.

SANTOS, Edilanê Mendes dos. **Estudo da Variabilidade e Mudanças Climáticas na Região de Manaus.** Universidade do Estado do Amazonas (UEA) - Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia (INPA) - Programa de Pós-Graduação em Clima e Ambiente – Cliamb. Dissertação (Mestrado). 2010. Manaus-AM.

SAYDELLES, Alexandre Pistoia. **Estudo do Campo Térmico e das Ilhas de Calor Urbano em Santa Maria-RS.** Programação de Pós-Graduação em Geografia e Geociências (PPGGEO). Dissertação de Mestrado. Santa Maria-RS, 2005.

SILVA, Daniel Araujo da. **A Função da Precipitação no Conforto do Clima Urbano da Cidade de Manaus.** Secretaria de Educação e Qualidade do Ensino do Estado do Amazonas. Revista Geonorte. Edição Especial 2. 40 f. Manaus/AM - 2012.

SILVA, Isabela Maria Souza. **Simulação do Aumento da Temperatura, Baseada em um Cenário de Mudança Climática, Sob o Comportamento do Banco de Sementes de uma Floresta Secundária, na Região de Manaus.** Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia (INPA) – Programa de Pós-Graduação em Ciências de Florestas Tropicais. Manaus/AM - 2015.

STERZA, Rafael de Lima; BRANDI, Analice Costacurta. **Comparação entre Métodos Numéricos: runge-kutta de quarta ordem e previsor-corretor.** Revista Eletrônica Paulista de Matemática. Artigo. Edição: ERMAC, Volume 7. 2016.

XAVIER, Flávio Galdino; SANTOS, Arion de Castro Kurtz dos. **A Modelagem Computacional, Utilizando o Laboratório de Aprendizagem Experimental com Animação para o Pensamento Sistemático (STELLA), em Tópicos de Educação Ambiental.** XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – NCE – IM/UFRJ. Volume 1. 10 f. 2003.