**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS**

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Luciano Silva da Costa**

# Geometria Fractal: utilização do Geogebra e aplicações na disciplina de Computação para Matemática no ensino superior

**MANAUS, 2018**

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS**

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

# Geometria Fractal: utilização do Geogebra e aplicações na disciplina de Computação para Matemática no ensino superior

**Luciano Silva da Costa**

*Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.*

Orientador: MSc Marcos Marreiro Salvatierra

Co-orientadora: MSc Helisângela Ramos da Costa

**MANAUS, 2018**

GOVERNO DO ESTADO DO
AMAZONAS

# ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **LUCIANO SILVA DA COSTA**. **Aos 23 dias do mês de novembro de 2018**, às 11:05 horas, em sessão pública na Sala Dalva Santiago da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pela professora da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisângela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Me. MARCOS M. SALVATIERRA, Me. CLAUDEILSIO DO NASCIMENTO CARVALHO e Me. JÚLIO CÉZAR MARINHO DA FONSECA**, o aluno **LUCIANO SILVA DA COSTA** apresentou o Trabalho: **"GEOMETRIA FRACTAL: UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA E APLICAÇÕES NA DISCIPLINA DE COMPUTAÇÃO PARA MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR"** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,6 à monografia divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Helisângela Ramos da Costa
Presidente da Banca Examinadora

Orientador (a)

Claudeilsio do Nascimento Carvalho
Avaliador 1

Julio C M da F
Avaliador 2

Luciano Silva da Costa
Aluno

(Fazer em duas vias, uma deve ser digitalizada para ser anexada ao TCC entregue em CD e outra deve ser entregue na Sec. Coordenação do Curso)

## DEDICATÓRIA

Dedico a minha família por ter sido meu alicerce e a todos meus amigos que eu sei que sempre contribuíram quando precisei de apoio.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder essa oportunidade e ter me dado força para chegar à conclusão do curso.

Agradeço aos meus pais, Ana Maria Silva da Costa e Abílio Serafim da Costa Filho, aos meus irmãos Gleicimar, Gilliard, Gleidimar, Gleidiane, Gláucia, Augusto, Ana Lúcia e Luciana, e aos meus amigos que contribuíram direta ou indiretamente no meu processo de formação acadêmica.

Por fim, agradeço aos meus professores pelo belo trabalho que desempenharam durante a minha jornada acadêmica especialmente ao professor Marcos que me acolheu como orientando e se dedicou muito para que esse trabalho pudesse ser concluído e a professora Helisângela que teve a maior paciência durante o período da escrita do trabalho que me ajudou muito como co-orientadora e a Neide Alves que cedeu alguns tempos de aula para que eu pudesse fazer a aplicação, e aos meus amigos de turma e dos outros cursos que fiz durante esse período de formação.

Obrigado a todos!

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino de Geometria Fractal e suas aplicações utilizando o software Geométrico Geogebra para turmas de Licenciatura em Matemática. Para isso, utilizamos o método de pesquisa qualitativa que teve como sujeitos da pesquisa, 35 alunos da turma de Computação para Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior da Universidade do Estado do Amazonas. Foram aplicadas 4 aulas que tinham duração de aproximadamente 1 hora no período de 1 mês entre os meses de agosto e setembro de 2018. Apresentamos diversos fractais, o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch. Foram aplicados questionários para analisar o conhecimento dos alunos em relação ao conhecimento geométrico e investigar se eles tinham alguma noção da Geometria Fractal. Quanto aos resultados obtidos, percebeu-se que o software despertou um interesse maior aos alunos em participar das atividades. Isso foi perceptível quando fizeram as construções no Geogebra e viram como os fractais realmente funcionam em relação às características de autossemelhança. Desse modo, o aprendizado se tornou prático e dinâmico. Onde os alunos conseguiram compreender a diferença entre uma figura geométrica e um fractal, e também, a partir das aulas dadas os alunos puderam fazer as construções dos fractais.



**Palavras-chave**: Geometria Fractal; Software Geogebra; Computação para Matemática.

## LISTA DE FIGURAS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objeto de pesquisa a geometria fractal. A geometria fractal aborda os estudos dos fractais, que está ligada a teoria do caos. Este tema foi escolhido por ser pouco explorado na Licenciatura de Matemática sendo elaborado apenas na disciplina de Computação para Matemática embora possua diversas aplicações. Além disso, o interesse por este tema poderia ser através do uso de softwares geométricos tais como o Geogebra, uma vez que devido os avanços tecnológicos devemos utilizar métodos de ensino aos alunos, adequando a novas tendências tecnológicas.

Contudo, as questões norteadoras do trabalho científico baseiam-se em:

- É possível usar a tecnologia na geometria fractal?
- Como utilizar a geometria fractal com o software Geogebra para turmas de Licenciatura em Matemática?
- Como o uso do software Geogebra ajuda na compreensão dos conteúdos?
- E que contribuição o software Geogebra pode trazer para o ensino-aprendizagem da Geometria Fractal?

A escolha do tema surgiu pelo fato de que a Geometria Fractal consiste em uma área pouco explorada no ramo da matemática. A Geometria Fractal não está nos currículos escolares do ensino básico e nem nos cursos de graduação conforme observado na grade do curso de Licenciatura em Matemática. Com isso, tentamos levar esse conhecimento a alguns alunos do curso de Matemática.

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino de Geometria Fractal e suas aplicações utilizando o software Geométrico Geogebra para turmas de Licenciatura em Matemática.

Dentre os objetivos específicos do trabalho destacam-se:

Fazer uma revisão sobre conceitos básicos de Geometria Plana; introduzir os conceitos básicos de Geometria Fractal; aplicar a Geometria Fractal em situações cotidianas dos alunos; utilizar o software Geogebra para a exploração da Geometria Fractal; avaliar a compreensão dos alunos em relação à Geometria Fractal; analisar e discutir os resultados obtidos.

Este trabalho está dividido em três capítulos: No capitulo 1 a Fundamentação Teórica aborda uma breve história da Geometria Fractal, e um pouco do ensino da geometria no contexto escolar. No capítulo 2 a Metodologia da pesquisa trata sobre os sujeitos da pesquisa, a pesquisa que foi da forma qualitativa e como os dados foram coletados e analisados. No capítulo 3 a Apresentação e análise dos resultados aborda como era o método de ensino utilizado pela professora da turma, as principais aplicações das atividades do projeto, os fatores que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho, os resultados das atividades, a aplicação do questionário de avaliação da contribuição das atividades.

# 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao iniciar sua vida escolar, a criança inicia o processo de alfabetização, onde também entram os conceitos matemáticos. O processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ser bem trabalhado nas escolas nas séries iniciais, para que futuramente os alunos não apresentem grandes dificuldades quanto à construção do pensamento lógico-abstrato.

Segundo Gouvea (2005):

> O processo de ensino-aprendizagem a que está sendo submetido o aluno não faz com que ele desenvolva o raciocínio lógico, a criatividade, as habilidades, etc. Ao contrário, transforma o aluno em um objeto, no qual se armazenam informações e algoritmos, e onde o professor tudo sabe e entende, apresentando os conceitos de maneira abstrata e superficial, restando aos estudantes recorrerem à memorização de regras e procedimentos. (GOUVEA, 2005, p. 7)

A matemática é um ponto muito forte no currículo escolar, e os alunos são muito cobrados quanto a isso. A situação na qual se encontra em muitas escolas do ensino básico são alunos que, em partes, são desinteressados ou com dificuldades em assuntos mais básicos, assuntos que deveriam ser mais trabalhados, com isso, educação matemática ficou um pouco temida pelos alunos.

Segundo Padilha (2012):

> Assim torna-se necessário rever nossas concepções de alunos, de professor e de processos de ensino e aprendizagem frente a essa nova realidade que exige profissionais com um novo perfil. Cabe então questionarmos o papel que temos como educadores na formação de nossos estudantes. (PADILHA, 2012, p. 28)

A matemática tem sido considerada muitas vezes como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro que deve ser assimilado pelo sujeito. No entanto, ela é uma ciência viva tanto no cotidiano dos cidadãos como nos centros de pesquisas ou de produção de novos conhecimentos os quais tem se constituído instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos em diferentes áreas do conhecimento. Por ser tão abrangente esse processo não pode limitar-se a uma simples memorização de regras, técnicas e ao conhecimento formal de definições, neste trabalho iremos fazer uma abordagem da geometria fractal, que é uma área um pouco nova no ambiente matemático. A geometria fractal estuda as propriedades e comportamentos de figuras mais complexas que a geometria euclidiana (ou dimensão topológica) abrange, descreve situações que não podem ser descritas pela geometria euclidiana.

O nome fractal vem do latim "*fractus*" que indica quebra, fragmento. Este nome foi sugerido por Benoit Mandelbrot (1924-2010), pioneiro no estudo dos fractais, para o conjunto dos objetos geométrico que possuem uma propriedade que os caracteriza, a autossimilaridade, ou seja, fractais são objetos nos quais cada uma de suas partes lembra o todo (NICOLA, 2013, p. 9)

A geometria fractal, assim como a matemática ainda está no processo de desenvolvimento. A geometria fractal por ser uma nova área do conhecimento matemático ainda tem muitos conceitos a serem rigorosamente definidos como as dimensões de formas, comparadas a geometria euclidiana

Segundo Adamir (2013):

> Diferentemente dos elementos encontrados na geometria euclidiana, fractais são formas geométricas que não possuem dimensão inteira, como, por exemplo, um ponto, uma reta ou um cubo. Um ponto tem dimensão zero, uma reta tem dimensão um, uma figura plana como um quadrado tem dimensão dois e um cubo, por exemplo, tem dimensão três. (ADAMIR, 2013, p.14)

Como os conceitos da geometria euclidiana se limitam muito, tem formas na natureza que podem ser exibidos de forma exata, à geometria fractal vem suprir essa necessidade, ela vem sendo frequentemente usada como ferramentas para estudar as estruturas complexas ou até mesmo simples padrões semelhantes aos presentes na natureza, como relata Padilha (2012):

> A geometria fractal surge como uma opção para ampliar os conhecimentos comumente estudados e que já não são suficientes para representar, entre outros, paisagens naturais. Sabemos que figuras como retângulos, quadrados, e círculos, clássicos da geometria euclidiana, mais dificilmente podem ser encontrados em elementos da natureza, como vegetais, rochas e rios, o que os fractais, com sua beleza e complexibilidade permitem. (PADILHA, 2012, p. 33)

A geometria fractal ainda não está definida por completa tem muita coisa ainda a ser descoberta, conceituada e ser mais exposta de forma rigorosa Segundo

Nicola (2013, p.22) “Os fractais podem ser definidos segundo algumas características intuitivas, pois se torna difícil a conversão da definição matemática para a linguagem ordinária devido à falta de termos adequados a sua tradução”. E Rabay (2013) complementa com o mesmo pensamento de Padilha sobre a representação dos fenômenos naturais. Os fractais podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente, através de processos recursivos, os quais podem apresentar características encontradas em formas da natureza.

> Durante muitos séculos utilizamos conceitos relacionados à geometria euclidiana para representar objetos matemáticos e modelar a natureza, exemplificar e explicar fenômenos naturais. A geometria euclidiana representa muito bem objetos criados pelo homem, porém, em muitos casos, ou não tem uma boa representação, ou representa de forma muito complexa diversos fenômenos ou objetos naturais. (RABAY, 2013, p. 1)

Na vida escolar todos ouviram a falar sobre geometria, embora que não seja um estudo muito aprofundado, mas deu para obter alguns conceitos e saber do que se trata, a não ser a geometria fractal, porque é uma nova área da matemática, segundo Nicola (2013):

> Embora o tema “fractal” ainda não faça parte do currículo do ensino básico, a simplicidade da matemática básica e a sedução das imagens produzidas podem provocar o interesse dos alunos pela matemática. Um dos aspectos relevantes desta pesquisa é a possibilidade de trazer alguma elucidação para o estudo, utilizando-se de recursos computacionais. (NICOLA, 2013, p. 11)

Visto que, tendo presente as considerações acerca da importância do uso do computador no contexto escolar, utilizaremos o software educacional Geogebra no decorrer do nosso processo para a exploração de figuras fractais.

Segundo Padilha (2012):

> O uso do software geogebra possibilita a exploração de objetos geométricos e algébricos de forma interativa, sendo assim destinados ao ensino de geometria, álgebra e cálculo. Permite a exploração de diferentes conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de ensino. (PADILHA, 2012, p.39)

O nosso assunto trata do uso das tecnologias, e no mundo em que vivemos não é muita novidade para esta geração que já está diretamente ligada aos avanços tecnológicos, acho que seria bem mais fácil conversar sobre o assunto por eles já terem o acesso. Segundo Gouvea (2005):

> Quando debatemos o uso das tecnologias da informação e da comunicação em sala de aula, temos que refletir a maneira de como devemos utilizar esse “novo” agente do processo de ensino aprendizagem, visando desenvolver a criatividade, o raciocínio e habilidades nos alunos. A tecnologia informática marca uma nova etapa na vida da sociedade, conduzindo-a a novas formas de viver, de trabalhar e de pensar. Entretanto, nas escolas e para muitos professores a informática ainda continua sendo um corpo estranho que provoca, sobretudo, um grande incômodo. (GOUVEA, 2005, p. 17)

De acordo com o autor Gouvea (2005) vale ressaltar que, muitos professores trabalham mais no modo tradicional, porque o sistema não colabora. Às vezes o professor não tem tempo suficiente para fazer o uso dos computadores na sala de aula, ou a escola não tem uma estrutura suficiente para realizar seu trabalho pedagógico, a falta de estrutura, formação, apoio moral tudo isso já faz com que os alunos percam o interesse em estudar. E na matemática isso não pode acontecer, porque os alunos já trazem o conceito que a matemática é complicada, muitas das dificuldades podem vim da formação.

Segundo Padilha (2012):

> Fazer o uso de uma ferramenta computacional que possa fornecer vantagens em relação a outros materiais didáticos em uso nas salas de aula é um desafio a que se propõem muitos educadores e, entre eles, estamos nós por meio deste trabalho. Pensamos que a produção de conhecimentos, tanto geométricos quanto algébricos, através desse recurso pode colaborar no processo de ensino aprendizagem nos conteúdos de forma significativa. (PADILHA, 2012, p. 32)

Nosso assunto trata da matemática aplicada à biologia e na biologia muitas coisas são vista na geometria fractal isso possibilita nosso estudo mais aprofundado da geometria fractal na natureza, aí entra um dos conceitos importante da geometria fractal a autossemelhança. Na natureza podemos encontrar diversas formas de fractais, como por exemplo, a couve-flor e o sistema pulmonar.

Segundo Rabay (2013):

> Na biologia, encontramos diversos exemplos de estruturas fractal: plantas e micro-organismos apresentam estruturas fractais. Em artigo recente, um grupo de cientistas explica porque animais de maior porte físico têm melhor aproveitamento de energia. A justificativa se dá justamente pela estrutura fractal de ramificação de veias e artérias, potencializando o consumo de oxigênio e de alimentos, toma como exemplo, a comparação entre um rato e um elefante, em que a relação entre volume da massa corpórea e o volume de alimentos ingeridos são muito diferentes. (RABAY, 2013, p.2)

Em grandes casos, a complexibilidade das formas que vimos na natureza é resultado de processos complicados e também complexos, mas isso é longe de ser verdade de um modo geral. Um dos grandes impactos da geometria fractal é mostrar que na presença de padrões complexos há uma possibilidade de processo muito simples.

Alguns dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dos fractais:

**SIERPINSKI (1882-1969)**

Waclaw Sierpinski contribuiu em várias áreas da matemática como na teoria dos números e topologia dos conjuntos.

Apesar de dificuldades impostas pela ocupação da Polônia pelo império Russo, que não facilitava o ingresso dos poloneses no nível superior, Sierpinski iniciou seus estudos na universidade de Varsóvia em 1899, então considerada uma universidade russa. Ainda estudante desenvolveu trabalhos reconhecidos até hoje. Foi professor nas universidades de Lyov e Varsóvia. Criador dos “monstros” matemáticos triângulo e tapete de Sierpinski. O tapete de Sierpinski é considerado uma generalização do conjunto de cantor para duas dimensões, como também o tapete de Sierpinski é considerado uma base para a esponja Menger em três dimensões. Também conta como sua criação a Curva de Sierpisnki, uma curva fechada iniciada por um quadrado, que preenche toda uma área quadrangular, tendo aplicações em otimização de rotas. (NICOLA, 2013)

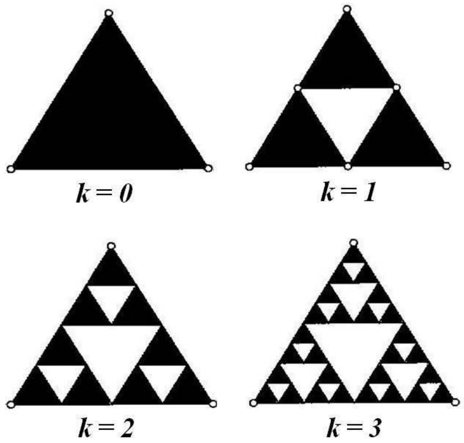



**Figura 1: Triângulo de Sierpinsk**

Fonte: http://simetrica.esy.es/soumatematica/exercicios/fractais-triangulo-de-sierpinski/

**PEANO (1858-1952)**

Giuseppe Peano conhecido pelos axiomas de Peano, que trata dos números naturais, deu várias contribuições na teoria dos conjuntos, álgebra linear, cálculo vetorial em aplicações geométricas de cálculo infinitesimal. Contribuiu consideravelmente na linguagem matemática na teoria dos conjuntos e lógica matemática, pela precisão e rigor utilizado em seus trabalhos.

Nasceu em uma fazenda a 5 km Cuneo. Parte da sua infância percorria esses 5 km a pé para frequentar a escola em Cuneo. Para continuar seus estudos, mudou para Turim, graduando-se doutor em Matemática na Universidade de Turim em 1880 e nesse mesmo ano começou lecionar nessa mesma universidade, foi professor também da Academia Militar de Turim.

Em 1980, publica seu “monstro” matemático, a curva de Peano proposto para cobrir totalmente uma superfície quadrangular. (NICOLA, 2013)

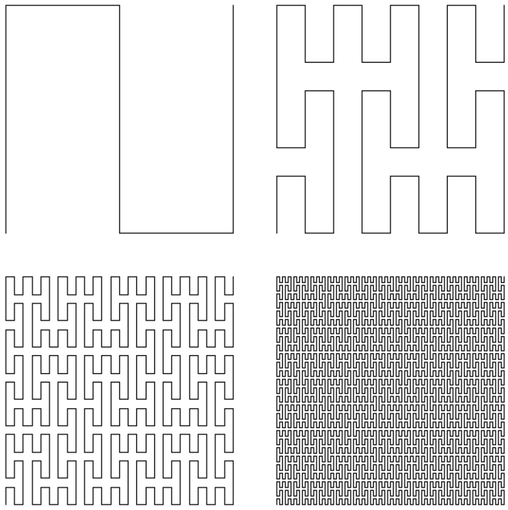


**Figura 2: Curva de Peano**

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peano_curve.png

**DAVID HILBERT (1862-1963)**

Contribuiu em várias área da matemática, consolidou a teoria dos Invariantes, abordagem axiomática da geometria euclidiana, teoria dos números algébricos, criação dos espaços de Hilbert que trata de equações integrais e de formas quadráticas. Considerado um dos mais notáveis matemáticos cujos tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos rumos da matemática atual.

Hilbert graduou-se na Universidade de Konigsberg em 1885. Foi professor na Universidade de Gottingen até aposentar-se em 1930, acompanhou o declínio dessa instituição pelo Império Nazista, vendo vários de seus colegas perderem seus cargos por terem alguma ligação com os judeus.

Em 1891 publica a curva de Hilbert, para uma superfície quadrada, sem interseção de pontos, um dos “monstros” matemáticos, hoje é utilizado em técnica de compressão de imagens. (RABAY, 2013)

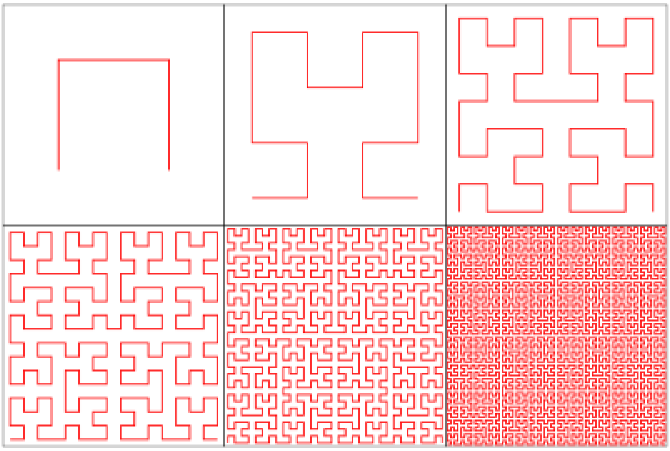


**Figura 3: Curva de Hilbert**

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve

**CANTOR (1845-1918)**

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos. Foi a partir desta teoria que ele chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas cardinais e ordinais e estabelecendo a diferença entre esses dois conceitos, que colocam novos problemas quando se referem a conjuntos infinitos.

Filho do dinamarquês, George Waldemar Cantor, e de uma musicista russa, Maria Ana Bohm, aos 11 anos mudou-se para a Alemanha, continuando seus estudos. Estudou no Instituto Federal de tecnologia de Zurique. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867. Foi professor na Universidade de Halle.

Sofreu várias crises de depressão associadas aos estudos excessivos em matemática, provavelmente sua doença seria diagnosticada como Transtorno Bipolar. Morreu em um hospital psiquiátrico em Halle em 1918.

Embora os conceitos matemáticos inovadores propostos por Cantor tenham enfrentado uma resistência significativa por parte da comunidade matemática da época, reconhece-se atualmente a grande contribuição dada por Cantor à matemática. Cantor provou que os conjuntos infinitos não têm a mesma potência, diferenciando os conjuntos enumeráveis dos contínuos. Provou que o conjunto dos números racionais é enumerável, enquanto o conjunto dos números reais é contínuo através do conhecido método diagonal. (NICOLA, 2013)

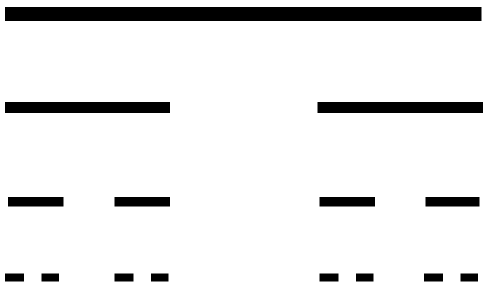


**Figura 4: Conjunto de Cantor**

Fonte: http://legauss.blogspot.com/2012/05/conjuntos-de-cantor-generalizados.html

**HAUSDORFF (1868-1962)**

Felix Hausdorff desenvolveu vários trabalhos em matemática aplicada à astronomia, teoria dos conjuntos, topologia e análise.

Filho de judeus teve forte incentivo dos pais para os estudos. Desde a infância mostrava facilidade em matemática, mas tinha fascínio pelas áreas de literatura e música e teria seguido a carreira de compositor caso não fosse pressionado pelos pais para a escolha de sua profissão. Graduou-se em Matemática em 1891, pela Universidade de Leipzig, Bonn e Greifswald. Em 1935 foi obrigado a abandonar universidade por ser judeu, passou por várias dificuldades e em 1942 seria mandado a um campo de concentração, quando se suicidou junto à esposa e a cunhada.

Além da carreira de matemático, mantendo entre seu círculo de amigos escritores e artistas de várias áreas foi escritor sob pseudônimo de Paul Mongré, publicando vários trabalhos literários e filosóficos.

Em 1919 desenvolveu conceitos sobre dimensão topológica, criando a Dimensão de Hausdorff, ou como iremos tratar, dimensão fractal pelo método de Hausdorff. (RABAY, 2013)

**MENGER (1902-1985)**

Karl Menger teve várias contribuições na área da Álgebra, Geometria Hiperbólica, dimensão topológica, teoria dos jogos, e nas ciências sociais.

Filho do famoso comunista Carl Menger. Quando jovem desenvolveu seus talentos em literatura, mas em 1920 ingressou na Universidade de Viena para estudar Física, interessou-se na área de matemática em estudos topológicos. Em 1921, contraiu tuberculose, e durante o tempo de dois anos de isolamento para tratamento dedicou-se aos estudos, e ao retornar, pouco tempo depois, em 1924, concluiu seu doutorado em Espaço Topológico. Foi professor nas Universidades de Amsterdam e Viena, no Instituto Tecnológico de Illinois e na Universidade de Notre Dame.

Em 1926, apresentou a esponja de Menger, ao explorar o conceito de dimensão topológica. Como cada face da esponja de Menger apresenta o tapete de Sierpinski cuja linha central representa o conjunto de Cantor, é considerada uma expansão tridimensional desses outros objetos fractais. (GOUVEA, 2005)

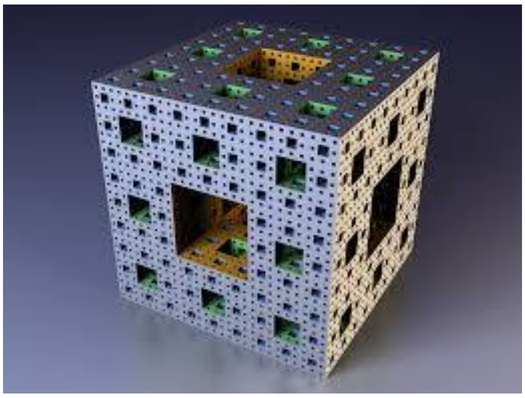


**Figura 5: Esponja de Menger**

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Esponja_de_Menger

**KOCH (1870-1924)**

Niels Fabian Helge Von Koch desenvolveu trabalhos nas áreas de Teoria dos Números e Equações Diferenciais.

Graduou-se em Matemática pela Universidade de Estocolmo, onde também adquiriu o título de doutor. Foi professor nesta universidade.

Foi criador do “monstro” matemático Curva de Koch, que aplicada aos lados de um triângulo equilátero gera a ilha de koch, ou floco de neve, pela semelhança que tem com os flocos de neve. Koch define essa curva como um exemplo de curva contínua em todo o intervalo, porém não diferenciável em parte alguma. Uma importante aplicação derivada da curva de Koch foi proposta por Mandelbrot para o dimensionamento fractal de linhas costeiras.

Passo a passo para a construção da curva de Koch. A partir de um segmento de reta, divida em 3 segmentos iguais, substituindo por 4 congruentes; o intermediário, substituindo por um triangulo equilátero sem o segmento intermediário. Depois, substitui cada um dos segmentos segundo a regra anterior. (NICOLA, 2013)

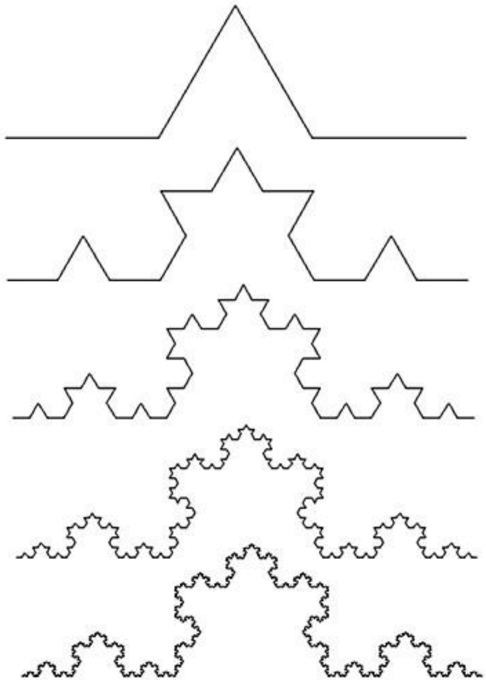


**Figura 6: Curva de Koch**

Fonte: https://teoriadacomplexidade.wordpress.com/teoria-fractal/

**JULIA (1893-1978)**

Gaston Maurice Julia conhecido pelo desenvolvimento do conjunto de Julia. Desde criança já demonstrava sua facilidade para os estudos, em especial, para matemática. Quando jovem ao servir na Primeira Guerra foi gravemente ferido, perdendo o nariz. Provavelmente produziu grande parte do seu trabalho no longo período de internação. Submeteu-se a várias cirurgias, mas não conseguiu se livrar da máscara de couro a qual foi condenado a usar pelo resto da vida. Atribuem-se ele o precursor da Geometria Fractal com sua importante contribuição. (RABAY, 2013)

**MANDELBROT (1924-2010)**

Mandelbrot foi o grande responsável pelo desenvolvimento da Geometria Fractal, ao nomear e ao fazer associações dessa geometria e várias áreas de conhecimento relacionando-os a objetos e fenômenos naturais, fatos aparentemente caóticos, fatos aparentemente caóticos, tendo como um grande aliado o computador.

Teve uma infância e adolescência bastante conturbada devido à família judia, tendo sido obrigado a morar na França fugindo da perseguição do governo Nazista. Como consequência, foi em parte educado por um tio, que era um conceituado matemático, e que pouco valorizava a preferência por geometria que o jovem tinha.

Ainda em 1945, eu tio apresenta o trabalho de Fatou e Julia, mas na época não desperta nenhum interesse ao jovem geômetra, estudou na Escola Politécnica de Paris, quando conheceu Paul Levy, de quem teve muitas influências. Em 1952, concluiu seu doutorado na Universidade de Paris. Em 1958, muda-se permanentemente para os EUA a convite da IBM que buscavam jovens talentos com ideias criativas. E com essa oportunidade Mandelbrot retoma os trabalhos de Fatou e Julia, implementando os resultados com auxílio de computadores, visualizando-os pela primeira vez em 1970, ao desenvolver programas para gerar gráficos. (RABAY, 2013)

Além desse importante trabalho, nomearam de Geometria Fractal, os objetos que apresentavam características de autossimilaridade e podiam ter dimensão conforme definição de Hausdorff. Reconheceram padrões na economia, ruídos em linhas de transmissão e objetos da Natureza. (RABAY, 2013)

Esses foram os grandes matemáticos contribuintes para o desenvolvimento da geometria fractal, onde muitos dedicaram a maior parte da vida para conceituar, e evoluir uma área da matemática.

# 2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo será apresentada a metodologia da pesquisa, onde descreveremos o tipo de pesquisa a ser realizada, indicando os procedimentos metodológicos, o local e os sujeitos da pesquisa e o instrumento utilizado para a coleta de dados.

A temática geometria fractal foi escolhida tendo em vista que, não é um assunto muito conhecido no ambiente escolar, e assim como a matemática ainda está no processo de desenvolvimento. Desde as primeiras indagações sobre a pesquisa que investiga se a tecnologia pode ser usada no ensino da geometria fractal, penso numa metodologia que possa permitir uma análise mais abrangente da vivencia escolar.

Neste estudo, devido à necessidade de obter um resultado significativo adotamos a pesquisa qualitativa que mostrar o desenvolvimento da posição reflexiva e que permite fundamentar, interrogar, compreender e interpretar os princípios metodológicos. Umas das características da pesquisa qualitativa é o processo e não o produto assim diz Gouvea 2005:

> Estamos preocupados com o processo, visto que durante a realização dos problemas emergiam os conceitos matemáticos necessários para a realização da atividade. Dessa forma, não estávamos preocupados com a resposta final (produto) e sim com o desenvolvimento (processo). (GOUVEA, 2005, p. 83)

O tema Fractal foi escolhido por apresentar uma propriedade fundamental da Geometria: a semelhança. Além disso, iremos usar como auxiliar o programa Geogebra, o uso do software contribuirá para o conhecimento dos alunos, visto que é uma ferramenta educacional assim como, "pensamos que a produção de conhecimentos, tanto geométricos quanto algébricos, através desse recurso pode colaborar no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de forma significativa" (PADILHA 2012, p. 32).

## 2.1 Local e Sujeitos da Pesquisa

A pesquisa foi feita em uma Universidade pública de Manaus, Universidade do Estado do Amazonas, mais especificamente, em uma turma de 35 alunos do 2° período do curso de Licenciatura em Matemática do turno noturno matriculados na disciplina de Computação para Matemática, e os alunos com faixa etária de 18 a 23 anos. A escolha da turma se justifica por ter fácil acesso a turma e aos computadores, pois as aulas são no laboratório de informática.

Os dados de campo foram coletados durante as aulas de matemática nos dias de segunda-feira no período do mês de agosto, durante esse tempo foi possível estabelecer uma relação com os alunos e o amadurecer do conhecimento sobre Geometria Fractal.

## 2.2 Instrumento da coleta de dados

O primeiro procedimento da coleta de dados foi o questionário diagnóstico (apêndice A), logo no primeiro encontro os alunos responderam o questionário para identificar o conhecimento sobre os fractais, na segunda aula responderam o questionário (apêndice B) que tinha como objetivo identificar o conhecimento geométrico e a relação deles com a matemática. Na terceira aula fizemos a construção do triângulo de Sierpinski no geogebra e os alunos também fizeram uma atividade avaliativa (apêndice C) para ver se os conceitos dos fractais ficaram bem definidos.

## 2.3 Análise dos dados

A análise dos dados será em gráficos e tabelas para apresentar os resultados comparando com a fundamentação teórica.

# 3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

## 3.1 Descrição das aulas antes da pesquisa

A professora da disciplina Computação para Matemática trabalhava com linguagem de programação. Todos os assuntos eram sempre relacionados à matemática. Dentre os assuntos apresentados, o que mais chamou a atenção foi uma questão em que envolvia desigualdade triangular.

As estratégias e metodologias trabalhadas foram: aula expositiva, dialogada e discursiva. Além disso, foram trabalhados nas aulas problemas contextualizados. Isso aconteceu da seguinte forma: ela apresentou um problema onde os alunos teriam que relembrar conceitos de geometria sobre desigualdade triangular. Uma das questões era para o aluno criar uma programação no Visualg para ver se formava ou não triângulo. Os alunos tiveram poucas dificuldades em relação a essa questão, e a maioria da turma conseguiu resolver a questão.

## 3.2 Descrição e aplicação das atividades durante a pesquisa

### 3.2.1 Análise dos resultados do questionário diagnostico

Analisando o conhecimento dos alunos em relação aos assuntos de geometria, constatou que a maior parte dos alunos se lembravam dos conceitos vistos no ensino médio e na disciplina de Geometria I. Quanto ao conhecimento da Geometria fractal quase ninguém conhecia e não faziam ideia do que se tratava conforme mostra Gráfico 1.

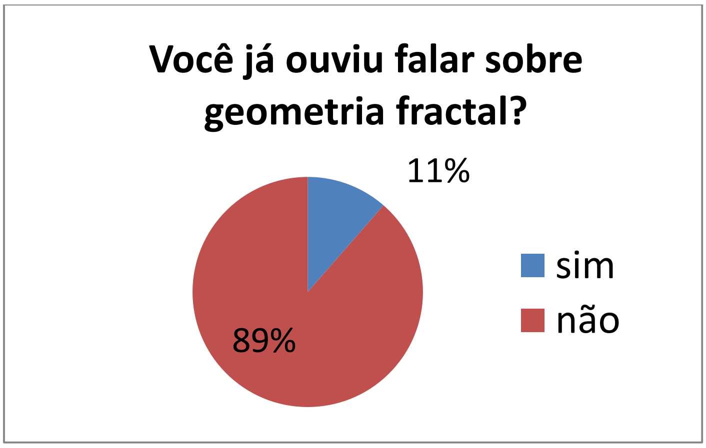



**Gráfico 1: conhecimento sobre a Geometria Fractal**

Fonte: Autor (2018)

Em relação à questão 2 do questionário diagnóstico. O que você imagina que seja a geometria fractal? E o que ela estuda?

A resposta da maioria foi que não sabia o que era e não imaginava o que seria a geometria fractal e do que se tratava. Aqueles que responderam que sabiam tinham pouca ideia do que se tratava e não conseguiram concluir o pensamento.

As respostas deles foram bem simples, só tinham uma ideia mesmo.

R1: “Ela repete a forma dela”.

R2: “Muitos fractais são encontrados na natureza.”

R3: “as formas são bonitas.”

Em relação à questão 3 do questionário diagnóstico. Cite alguns exemplos em que mostram onde a geometria é usada no cotidiano.

As respostas mais comuns foram: na engenharia e arquitetura.

Em relação à questão 4 do questionário diagnóstico. Quais atividades você mais gostou de fazer em geometria? Por quê?

A maioria respondeu que gostava da parte dos estudos dos triângulos, alguns citaram sobre o Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales que aprenderam no ensino médio.

### 3.2.2. Descrição das aulas

**Aula 01**

**Data: 27/08/2018**

**Série/Turma:** 2° período de Matemática

**Conteúdo abordado:** História da Geometria Euclidiana, Figuras planas e Logaritmo

**Procedimentos metodológicos** aula expositiva e dialogada; história da matemática.

**Recursos didáticos:** Quadro branco, pincel, notebook, e data show.

**Passo a passo da aula:**

**1º momento:** a aula foi iniciada com a apresentação do projeto do TCC, mostrei os objetivos do trabalho a ser alcançado.

**2° momento:** falei sobre a História da Geometria Euclidiana, em que foram dialogadas com os alunos através de imagens algumas situações nas quais as figuras geométricas são usadas como ferramentas de suporte para outras áreas do conhecimento e não como um assunto exclusivo da matemática. Além disso, foram destacados os entes geométricos principais: ponto, reta e plano e as figuras triângulo e quadrado fundamentais na construção dos primeiros fractais.

**3º momento:** Definição de Logaritmo e propriedade da potência trabalhei logaritmos porque é necessário esse conceito para a definição de dimensão fractal, e usei só a propriedade da potência por ser a única a ser usada na demonstração da fórmula.

**Participação e dúvidas dos alunos:** os alunos participaram da aula na hora que mostrei as formas geométricas para ele identificarem. Eles ficaram só perguntando por que eu ia usar logaritmo, e expliquei que seria para o cálculo da dimensão e na próxima aula explicaria.

**Aula 02**

**Data: 24/09/2018**

**Conteúdo abordado:** Breve Histórico da Geometria Fractal; definições: Fractal e Dimensão Fractal; passo a passo das construções.

**Procedimentos metodológicos:** aula expositiva e dialogada; história da matemática.

**Recursos didáticos:** Quadro branco, pincel, TV multimídia.

**Passo a passo da aula: 1º momento:** falei sobre a História da Geometria Fractal, onde foi dialogado com os alunos sobre como surgiu o termo fractal e quem foi o responsável por denotá-lo, um pouco das características dos fractais e aplicações.

**2º momento:** Além disso, foram destacados os fractais que serão trabalhados ao decorrer da aplicação que foram o triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch. Além disso, também mostrei os fractais mais conhecidos como o Conjunto de Cantor, fractais gerados por programas e os fractais naturais.

**3º momento: Cálculo da dimensão Fractal.**

Expliquei que não necessariamente todas as estruturas que apresentam autossimilaridade são fractais. Por exemplo, um segmento de reta, um quadrado ou um cubo podem ser divididos em partes menores, porém, elas não são fractais.

A dimensão dos fractais é uma dimensão fracionária, diferente da dimensão euclidiana tida como dimensão inteira, nos fractais, quase sempre nos deparamos com um resultado fracionário para determinar sua dimensão.

Nessa parte fiz a demonstração da fórmula para calcular a dimensão de um fractal como consta na figura 7 e usei como exemplo a dimensão da Curva de Koch e do Triângulo de Sierpinski.

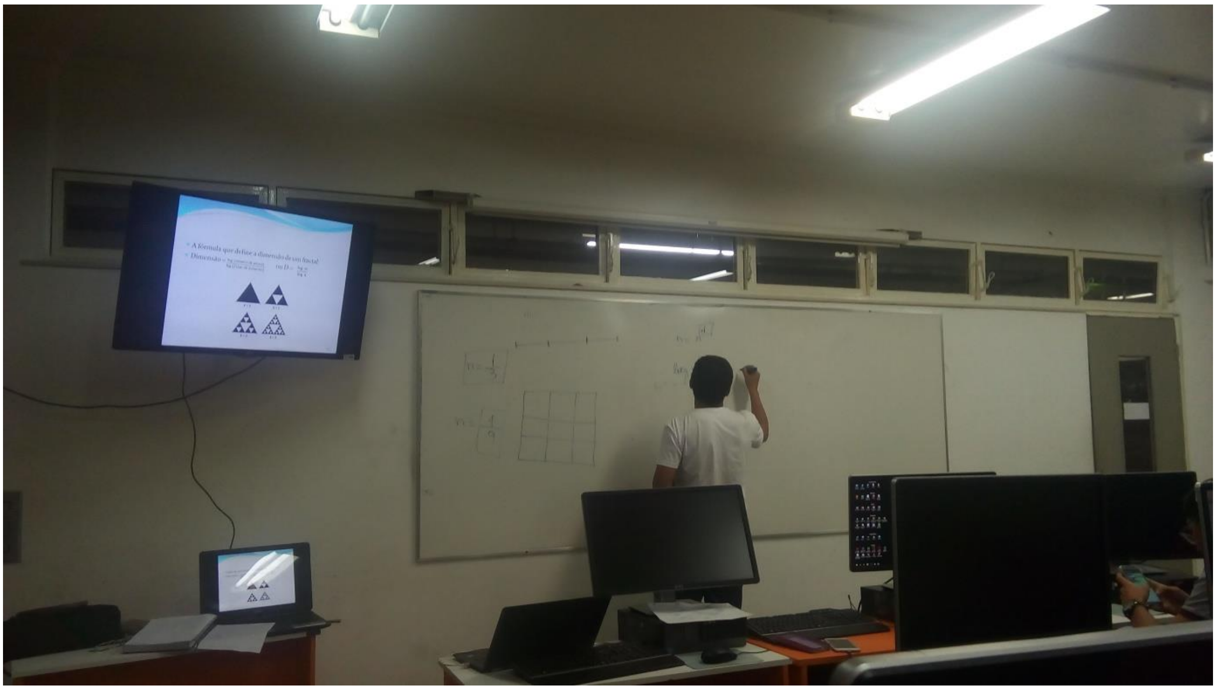


**Figura 7: Cálculo da dimensão fractal**

Fonte: Autor (2018)

E também expliquei a diferença dos fractais da natureza e os gerados por computador. A natureza se destaca muito por apresentar essas características dos fractais.

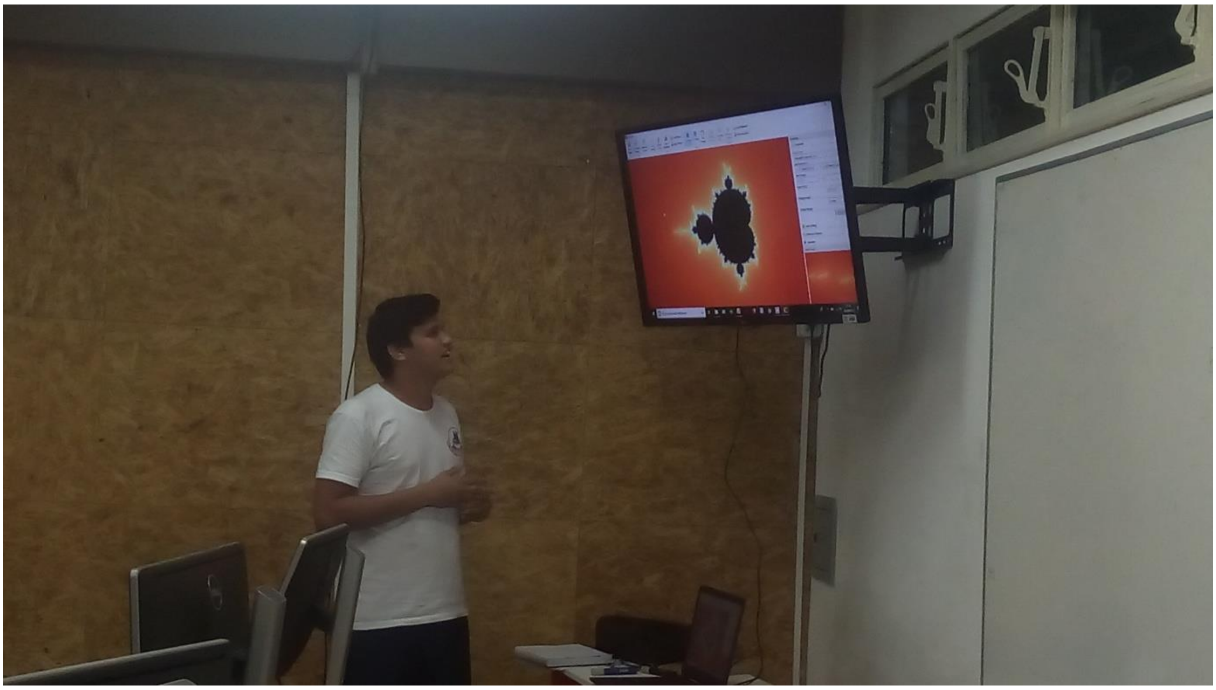


**Figura 8: Fractal gerado no computador**

Fonte: Autor (2018)

**Participação e dúvidas dos alunos:** os alunos participaram bastante da aula na hora que mostrei os fractais gerados pelos programas de computador, mostrei os fractais que são encontrados na natureza. Eles falaram que as formas dos fractais sempre se repetem e a Geometria Fractal é uma área da matemática que eles ainda não conheciam, então ficaram um pouco surpresos com os fractais.

**Ações não efetivadas:** a ideia para trabalhar a dimensão fractal era para fazer o cálculo da dimensão de uma folha, mas não foi possível, pois precisaríamos de mais softwares específicos para modificar a imagem da planta e o Matlab para fazer os cálculos e não teria tempo suficiente para a aplicação com os alunos.

**Aula 03**

**Data: 01/10/2018**

**Série/Turma:** 2° período de Matemática

**Conteúdo abordado: Geometria Fractal e aplicações com o Geogebra**

**Procedimentos metodológicos:** aula expositiva e dialogada

**Recursos didáticos:** Quadro branco, pincel, vídeo e data show

**Passo a passo da aula:**

**1° momento:** a aula foi iniciada relembrando as propriedades dos fractais e comparando com a geometria euclidiana, em seguida, foi explorado sobre as características, onde existem as retas e segmentos de reta com uma dimensão, figuras de superfície plana, como o quadrado com dimensão 2, e os sólidos como o cubo de dimensão 3.

Falando em dimensão fractal tem o exemplo do triângulo de Sierpinsk e da curva de Koch, o Triângulo de Sierpinsk com dimensão aproximadamente 1,585, portanto, entre os inteiros 1 e 2. A curva de Koch possui dimensão entre 2 e 3.

Um objeto geometricamente autossemelhante, ou seja, cada uma das suas partes são uma cópia reduzida exata do objeto inicial. Este conceito de dimensão apenas pode ser considerado na análise de objetos que têm autossemelhança exata.

**2° momento:** o uso do geogebra. Ensinei os alunos a fazer a construção do Triângulo de Sierpinski no geogebra.

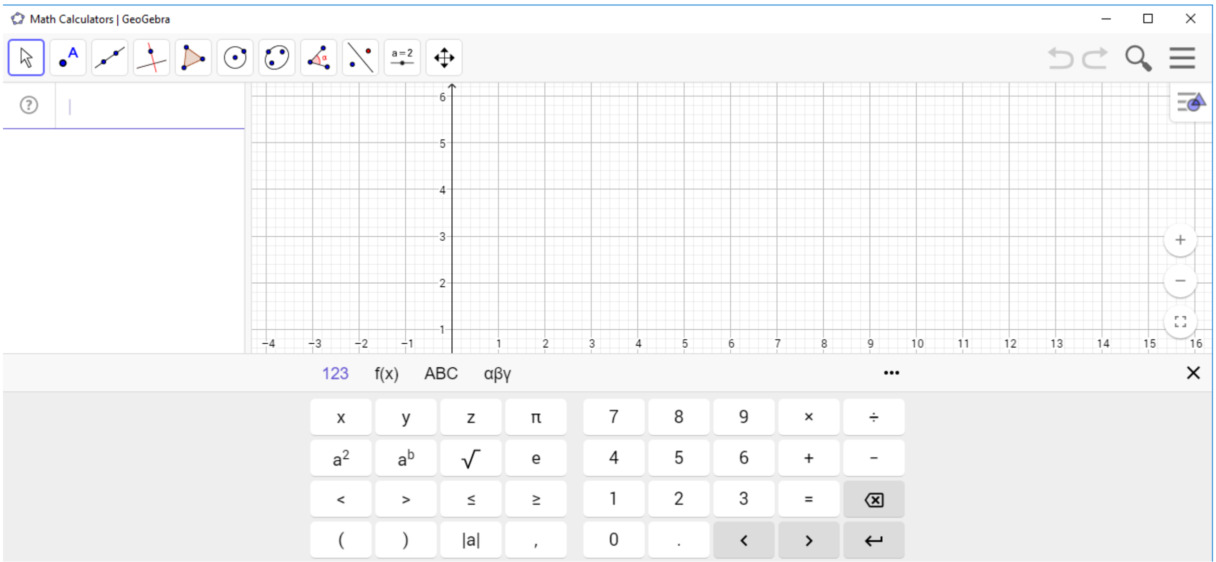



**Figura 9: Página inicial do Geogebra**

Fonte: Autor (2018)

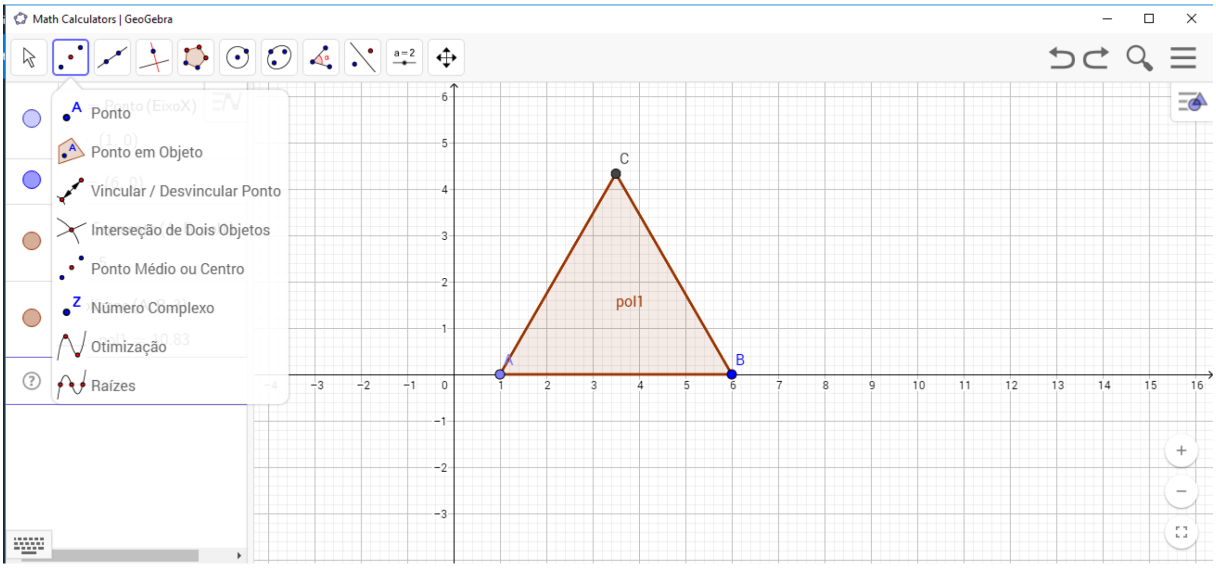



**Figura 10: Construção do triângulo equilátero**

Fonte: Autor (2018)

Primeiro passo para a construção do triângulo de Sierpinski é a construção de um triângulo equilátero usando a ferramenta polígono regular do geogebra, primeiro determina dois pontos e seleciona o número de vértices.

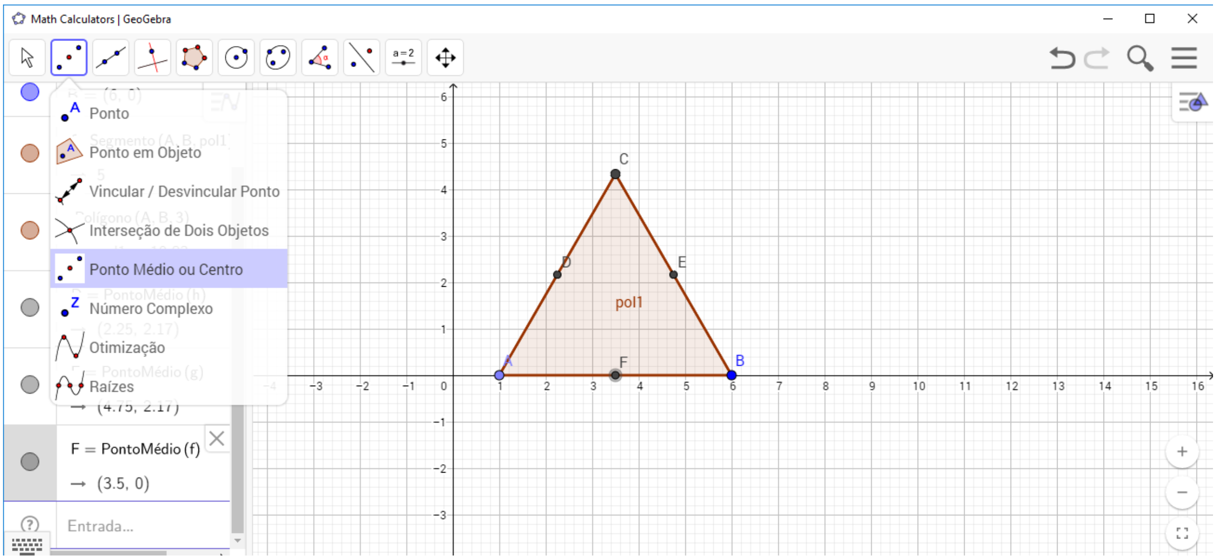



**Figura 11: Ponto médio de cada lado**

Fonte: Autor (2018)

Segundo passo é determinar os pontos médios em cada um dos lados do triângulo usando a ferramenta ponto médio ou centro clicando em cada aresta do triângulo.

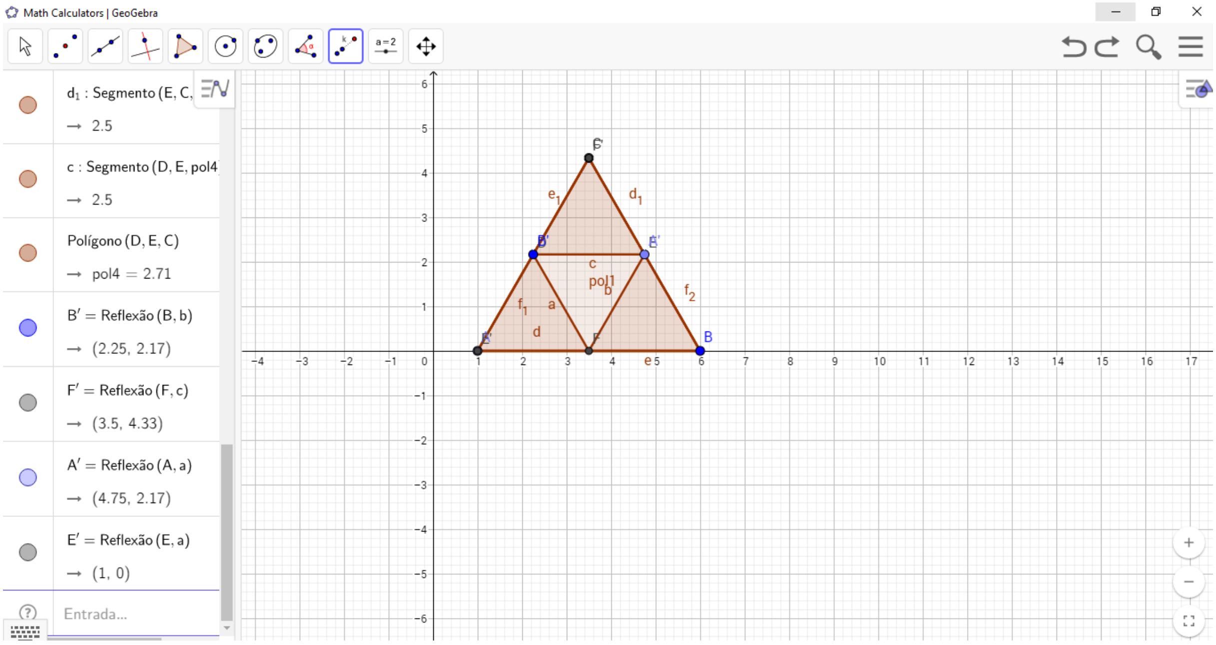



**Figura 12: Triângulo de Sierpinski primeira iteração.**

Fonte: Autor (2018)

No terceiro passo da construção é a criar um ponto inverso aos médios usando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, e depois a criação de triângulos menores usando os pontos médios do triângulo com a ferramenta polígono.

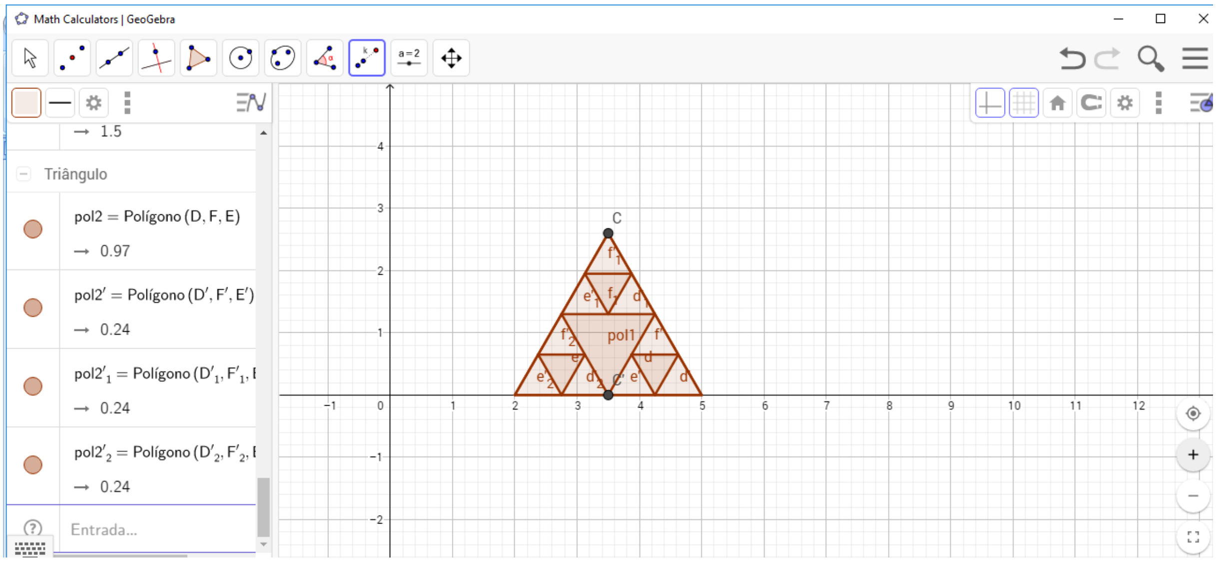



**Figura 13: Construção dos triângulos menores**

Fonte: Autor (2018)

No quarto passo da construção é criar os triângulos menores usando a ferramenta homotetia clicando no centro do polígono maior e no ponto duplicado.

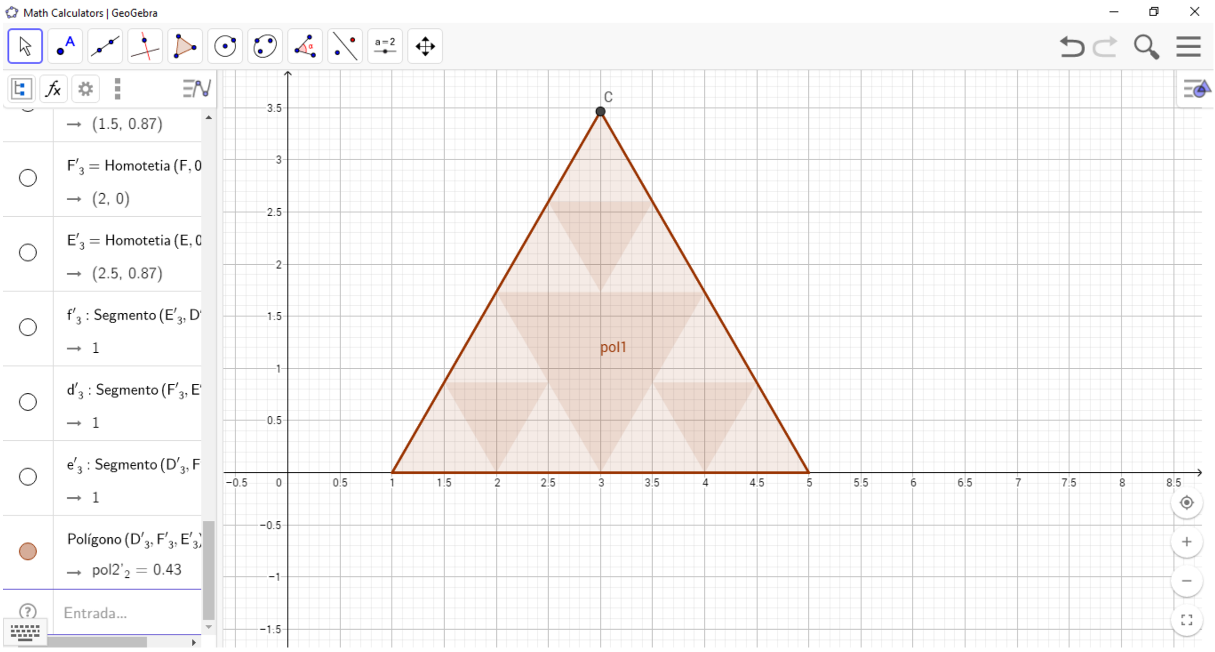



**Figura 14: Triângulo de Sierpinski segunda iteração.**

Fonte: Autor (2018)

Como o Triângulo de Sierpinski é um fractal que tem a característica da autossemelhança ele vai repetir a sua forma infinitamente.

**Figura 15: Construção no geogebra**

Fonte: Autor (2018)

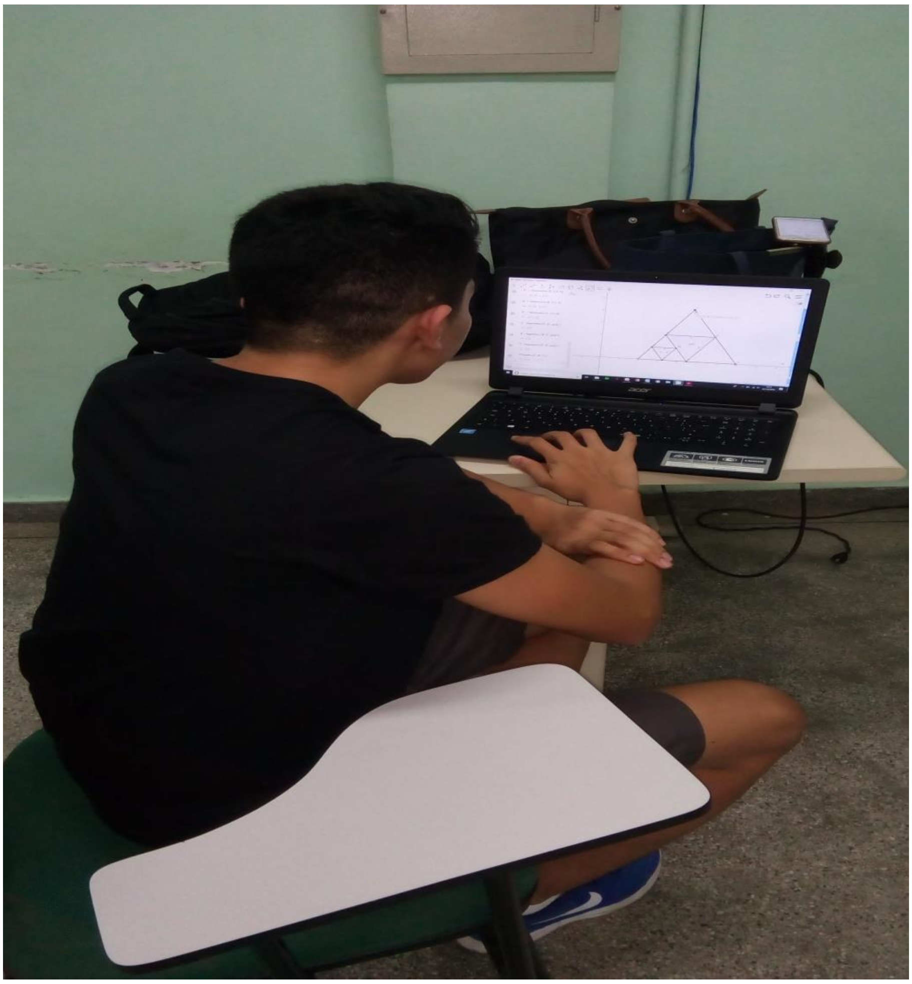


**Figura 16: Aluno fazendo o Triângulo de Sierpinski**

Fonte: Autor (2018)

**Participação e dúvidas dos alunos:** os alunos participaram da aula na hora de fazer as construções, as dificuldades deles foram só em alguns comandos específicos do Geogebra como a ferramenta homotetia que é o último passo da construção. Alguns comentaram que na segunda iteração o Triângulo de Sierpinski lembra a planificação do tetraedro. A construção do tetraedro se dá pela planificação de quatro triângulos equiláteros.

### 3.2.3 Aplicação de uma avaliação de aprendizagem aos alunos Análise dos resultados da avaliação apêndice C.

| Questão 1 | Quantidade de acertos | % acertos | Quantidade erros | % erros |
|---|---|---|---|---|
| A | 18 | 100% | 0 | 0% |
| B | 16 | 88,8% | 2 | 11,2% |
| C | 15 | 83,3% | 3 | 16,7% |
| D | 15 | 83,3% | 3 | 16,7% |
| E | 18 | 100% | 0 | 0% |

**Tabela 1: Resultados da atividade 1**

Fonte: Autor (2018)

Essa atividade foi relacionada ao triângulo de Sierpinski. Onde os alunos teriam que fazer a construção e responder 5 perguntas que está ano apêndice C. No item A e E como consta na tabela todos acertaram, nos itens B, C e D a maioria acertou. Eles tiveram poucas dificuldades apesar de ser um assunto novo, não foi muito difícil para a compreensão. Alguns comentaram que na segunda iteração o Triângulo de Sierpinski lembra a planificação da pirâmide. A construção do tetraedro se dá pela planificação de quatro triângulos equiláteros.

Os poucos dos erros foram na questão em que temos que observar em quantas partes o fractal fica dividido após cada iteração. A questão era relacionada ao Triângulo de Sierpinski, e também tiveram dúvida em quantos triângulos tiveram que ignorar até completar a terceira iteração.

### 3.2.4 Análise dos resultados do questionário para avaliar contribuição da metodologia aplicada

De acordo com o apêndice C, num total de 2 aulas dadas cada aula com aproximadamente 1 hora. A primeira questão estava relacionada com a as figuras utilizadas nas construções, e as características, então num total de 18 alunos presentes, houve um desempenho de 100 % resultando que houve uma aprendizagem. Na segunda questão em relação à percepção dos segmentos e os lados da figura como ela se comporta a cada iteração, houve um desenho de 88,8% de acertos. Na terceira questão tinha que ser interpretada, pois era para observar a figura toda em relação a todas as etapas já feitas. Nessa questão houve um desenho de 83,3 %. Na quarta questão era parecida com a segunda, só que era para analisar apenas os segmentos substituídos e observar o total de segmentos da figura. E na última questão era para observar quantos triângulos tinha sido ignorado durante a construção conforme as iterações pedidas na questão.

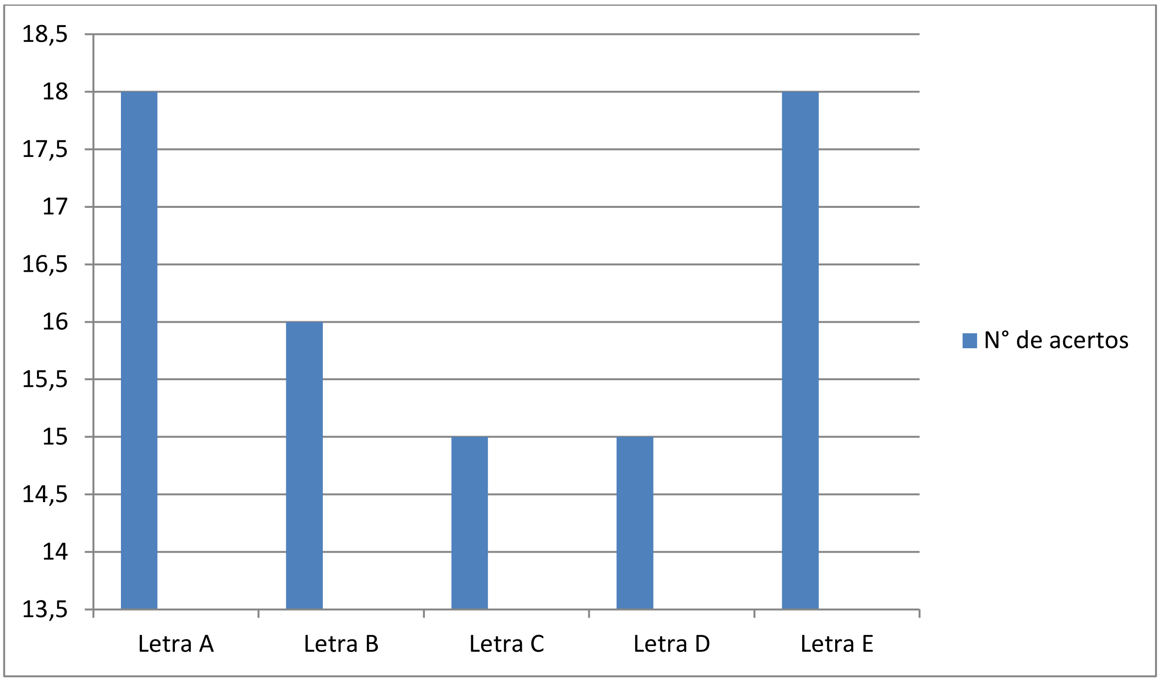



**Gráfico 2: Números de acerto das questões**

Fonte: Autor (2018)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre os fractais onde inicialmente foram relembrados alguns conceitos básicos da Geometria Euclidiana para poder prosseguir com os estudos dos fractais.

O objetivo deste trabalho foi contribuir para o ensino-aprendizagem de Geometria, através de um estudo sobre Fractais Geométricos. Esse estudo incluiu a utilização do software de Geometria Geogebra. Dessa forma, efetuamos uma análise sobre atividades desenvolvidas e procuramos investigar, através da Tecnologia na Educação Matemática, quais contribuições um estudo mais aprofundado poderia trazer para o ensino-aprendizagem de Geometria.

Em relação aos problemas da pesquisa que instigou a desenvolver um estudo sobre os fractais. Conseguimos fazer o uso da tecnologia para o ensino da Geometria Fractal através do software educacional Geogebra. A utilização do Geogebra foi para o auxílio metodológico na qual fizemos as construções dos principais fractais na lousa e a construção do Triângulo de Sierpinski no Geogebra.

Quanto aos resultados obtidos, nota-se que o software despertou um interesse maior aos alunos em participar das atividades. Isso foi perceptível quando fizeram as construções no geogebra e viram como os fractais funcionam em relação às características de autossimilaridade. Desse modo, o aprendizado se tornou prático e dinâmico. Os alunos conseguiram compreender a diferença entre uma figura geométrica e um fractal, e também, a partir das aulas dadas os alunos puderam fazer as construções dos fractais tanto manualmente quanto no Geogebra.

Além das construções foram trabalhados exemplos do cotidiano. Nesses exemplos, foram relacionados a geometria euclidiana e a geometria fractal, onde os alunos puderam diferenciar os fractais pela característica da autossemelhança.

A partir do trabalho realizado, foi possível perceber que o projeto pode ser expandido. Isso pode ser feito a partir do uso de outros fractais que não foram trabalhados, como: Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert, entre outros. Além disso, verificar a existência de outros programas para realizar outras construções. Dessa forma, outras pesquisas relacionadas aos fractais poderão ser feitas e assim, despertará o interesse dos alunos em Geometria Fractal.

## REFERÊNCIAS

ADAMIR, Paulo Sergio. **Fractais no ensino médio**: uma sequência didática. São Carlos: UFSCar, 2013. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos. 2013. Disponível em http://bdtd.ibict.br/vufind/ acesso em 2 de março.

GOUVEA, Flávio Roberto**. Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e software de geometria dinâmica**. Rio Claro. 2005. 272 f. Dissertação (mestrado em educação matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005. Disponível em http://bdtd.ibict.br/vufind/ acesso em 6 de março.

NICOLA, Celso Henrique. **Conhecendo fractal no ensino médio** – Árvore Pitagórica. São Carlos: UFSCar, 2013. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos. 2013. Disponível em http://bdtd.ibict.br/vufind/ acesso em 28 de fevereiro.

PADILHA, Teresinha Aparecida Faccio. **Conhecimentos Geométricos e Algébricos a partir da construção de fractais com o uso do software Geogebra.** 2012. 140 f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro Universitário Univates, Lajeado, 2012. Disponível em http://bdtd.ibict.br/vufind/ acesso em 04 de março.

RABAY, Yara Silvia Freire**. Estudo e aplicações da geometria fractal.** 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em http://tede.biblioteca.ufpb.br:8080/handle/tede/7651 acesso em 2 de março.

## APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Caro aluno, este questionário tem como objetivo avaliar os conhecimentos relacionados à geometria, saber as dificuldades que você sente para compreender os conteúdos, para realizar as atividades solicitadas e, assim, analisar possíveis estratégias e metodologias para melhorar o ensino e a aprendizagem da Geometria.

1) Você já ouviu falar em Geometria Fractal? ( ) Sim ( ) Não

2) Você já ouviu falar em Geogebra? ( ) Sim ( ) Não

3) Cite alguns exemplos em que mostram onde a geometria é usada no cotidiano.

4) Quais atividades você mais gostou de fazer em geometria? Por quê?

5) Faça um resumo sobre o conteúdo, para que ele serve.

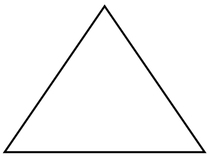
## APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO SOBRE OS CONHECIMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRIA

Caro aluno, este questionário tem como objetivo avaliar os conhecimentos relacionados à geometria, saber as dificuldades que você sente para compreender os conteúdos, para realizar as atividades solicitadas e, assim, analisar possíveis estratégias e metodologias para melhorar o ensino e a aprendizagem da Geometria.

1) Dê a definição triângulo equilátero.

   ___________________________________________________________

2) O triângulo abaixo tem um perímetro de 27 cm.
   Qual é o comprimento de um dos lados do triângulo? Os 3 lados têm o mesmo comprimento.



   ___________________________________________________________

   ___________________________________________________________

3) Um retângulo tem uma área de 35 milímetros quadrados. O comprimento do retângulo for igual a 7 milímetros. Qual é a largura do retângulo?

   ___________________________________________________________

4) Qual a área e o perímetro de um campo de futebol, de comprimento 25 m e largura 5 m?

___________________________________________________________

5) Qual é a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm?

___________________________________________________________

## APÊNDICE C - ATIVIDADE 1. TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Faça a construção do Triângulo de Sierpinski até a terceira iteração e responda as questões a seguir:

a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas características?

_________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

b) Depois de realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

___________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

c) c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

_______________________________________________________________

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

___________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

e) Quantos triângulos você ignorou durante as etapas da construção?

_____________________________________________________________________________________________________________________________________

## APÊNDICE D - AULA 1

**Aula 01**

**Data: 27/08/2018**

**Série/Turma:** 2° período de Matemática

**Conteúdo(s) abordado(s):** História da Geometria Euclidiana, Figuras planas e Logaritmo

**Conceitos:** Figuras planas (quadrado e triangulo), Definição de Logaritmo e propriedade da potencia

**Objetivo(s):**
- apresentar um breve história da geometria euclidiana e da existência de outras geometrias
- destacar os entes geométricos principais como ponto, reta e plano; as características das principais figuras planas como triangulo e quadrado a serem utilizadas nos fractais
- revisar definição de logaritmo e propriedade da potência necessárias para a dimensão de um fractal

**Procedimentos Metodológicos:** aula expositiva e dialogada; história da matemática; tecnologia informática (Power Point).

**Recursos didáticos:** Quadro branco, pincel e data show.

**1º momento:** a aula será iniciada com a apresentação do projeto do TCC

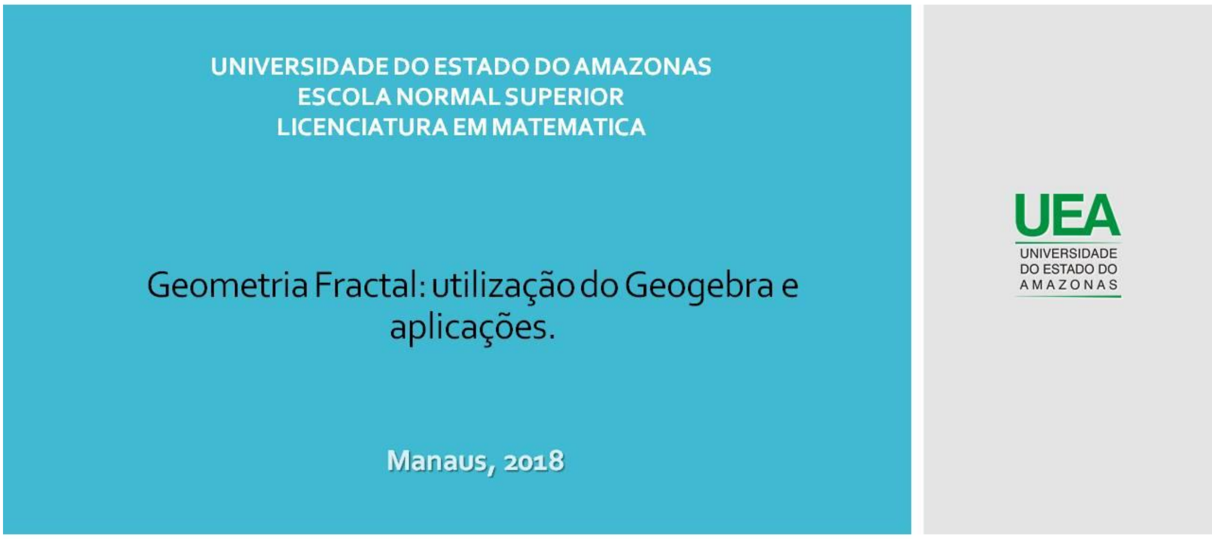
**2º momento:** falarei sobre a História da Geometria Euclidiana, onde serão dialogadas com os alunos através de imagens algumas situações em que as figuras geométricas são usadas como ferramentas de suporte para outras áreas do conhecimento e não como um assunto exclusivo da matemática. Além disso, serão destacados os entes geométricos principais: ponto, reta e plano e as figuras triângulo e quadrado fundamentais na construção dos primeiro fractais.

**3º momento:** Definição de Logaritmo e propriedade da potência
Definição: sejam e *b* números reais e positivos com a ≠1 chama-se logaritmo de *b* na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base de modo que a potência a^x seja igual a *b.*

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \text{ , sendo } \quad b > 0 \text{ , } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Dizemos que:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.




UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

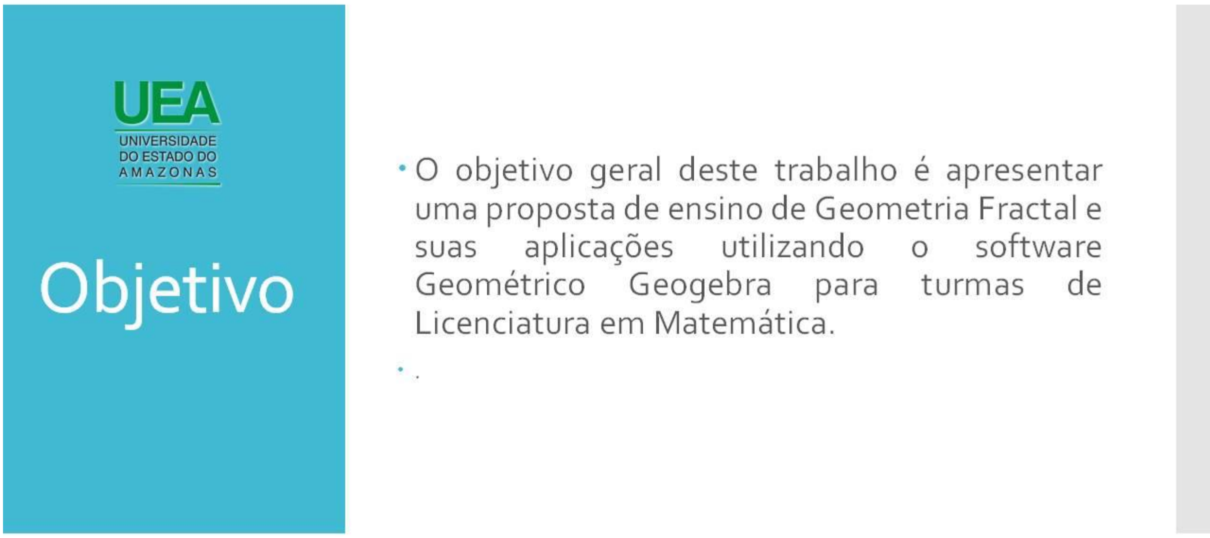
## Introdução

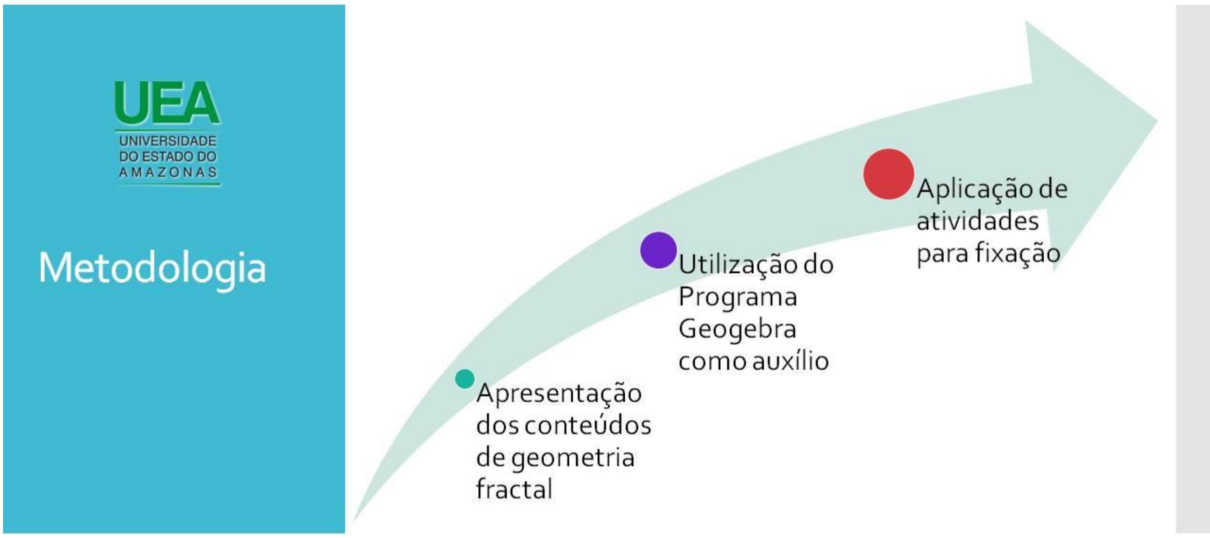
- Este trabalho tem como objeto de pesquisa a geometria fractal. A geometria fractal aborda os estudos dos fractais, que está ligada a teoria do caos. Este tema foi escolhido por ser atual, e ter possibilidades de aplicações em diversas áreas.

UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

## Questões Norteadoras

- É possível usar a tecnologia na geometria fractal?
- Como utilizar a geometria fractal com o software Geogebra para turmas de Licenciatura em Matemática?
- Como o uso do software Geogebra ajuda na compreensão dos conteúdos?
- E que contribuição o software Geogebra pode trazer para o ensino-aprendizagem da Geometria Fractal?


UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
Objetivo
O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino de Geometria Fractal e suas aplicações utilizando o software Geométrico Geogebra para turmas de Licenciatura em Matemática.


UEA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
Metodologia
Apresentação dos conteúdos de geometria fractal
Utilização do Programa Geogebra como auxílio
Aplicação de atividades para fixação

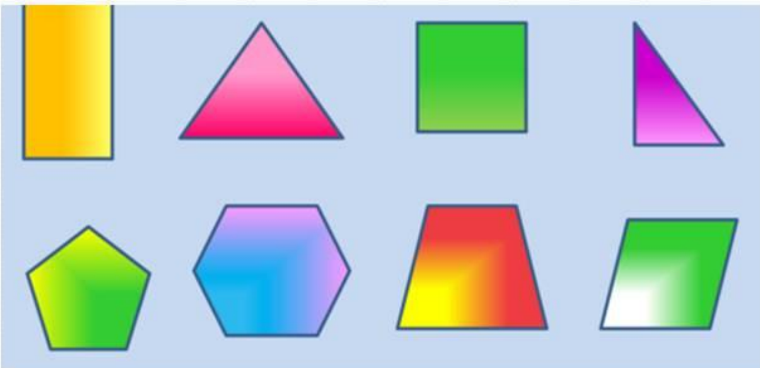
## Resultados


## História da Geometria Euclidiana

- A geometria euclidiana teve sua origem com o grande matemático Euclides de Alexandria;
- As origens da Geometria parecem coincidir com as necessidades do dia-a-dia. construir casas, calcular perímetro e área, essas são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas.

1

# Identificação de figuras planas



2

# Estruturas geométricas

3

# Definição de Logaritmo

- Definição: sejam *a* e *b* números reais e positivos com a ≠1 chama-se logaritmo de *b* na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base de modo que a potência a^x seja igual a *b*.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \text{ , sendo } \quad b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$



- Dizemos que:
- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.
- Exemplos de logaritmos:

$\text{Log}_3 9 = 2$,

$\log_2 8 = 3$

# Propriedade: Logaritmo da potência

- Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e r E R, então:
- $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$

## APÊNDICE E - AULA 2

**Aula 02**

**Data: 24/09/2018**

**Série/Turma:** 2° período de Matemática

**Conteúdo(s) abordado(s):** Breve Histórico da Geometria Fractal; definições: Fractal e Dimensão Fractal; passo a passo das construções.

**Objetivo(s):**
- apresentar uma breve história da geometria Fractal;

- as características dos principais fractais como triangulo de Sierpinski e Curva de Koch

**Procedimentos Metodológicos:** aula expositiva e dialogada; história da matemática; tecnologia informática (Power Point).

**Recursos didáticos:** Quadro branco, pincel e data show.

**1º momento:** falarei sobre a História da Geometria Fractal, onde serão dialogadas com os alunos através de imagens algumas situações em que as figuras geométricas são usadas como ferramentas de suporte para outras áreas do conhecimento e não como um assunto exclusivo da matemática.

**2º momento:** Além disso, serão destacados os fractais que serão trabalhados ao decorrer da aplicação que serão o triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMATICA

Luciano Silva da Costa

**Geometria Fractal: utilização do Geogebra e aplicações.**

MANAUS, 2018

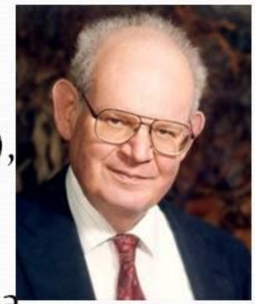
1

# História da Geometria Fractal

- O termo fractal foi usado pela primeira vez no ano de 1975 para denominação da classe especial de curvas definidas recursivamente que produziam imagens reais e surreais. A partir disso, foi desenvolvida a geometria fractal, que visa o estudo dos subconjuntos complexos de espaços métricos.

2

- O nome fractal vem do latim "*fractus*" que indica quebra, fragmento. Este nome foi sugerido por Benoit Mandelbrot (1924-2010), pioneiro no estudo dos fractais, para o conjunto dos objetos geométrico que possuem uma propriedade que os caracteriza, a autossimilaridade, ou seja, fractais são objetos nos quais cada uma de suas partes lembra o todo.

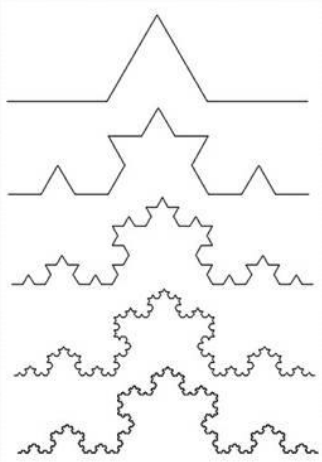


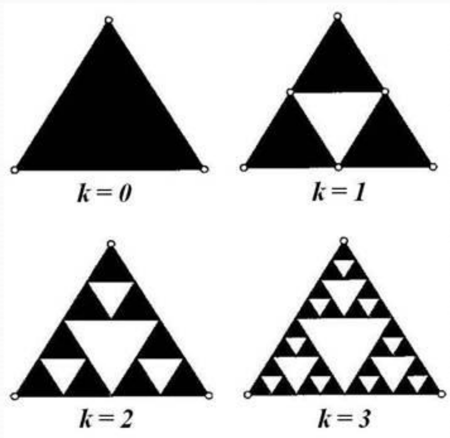
3

# Definição:

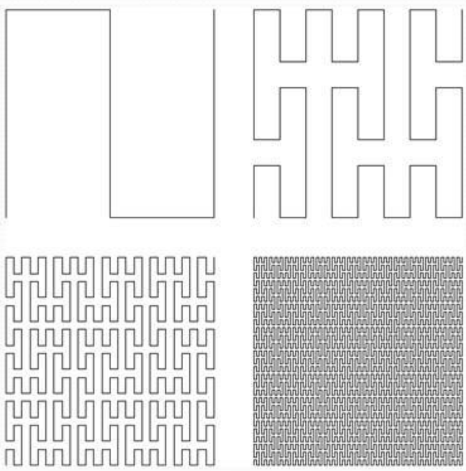
- Um conjunto $\boldsymbol{S}$ é chamado de fractal ou autossimilar se pode ser subdividido em $\boldsymbol{K}$ subconjuntos congruentes, onde cada um pode ser ampliado por um fator constante $\boldsymbol{M}$ para produzir o conjunto $\boldsymbol{S}$ inteiro.

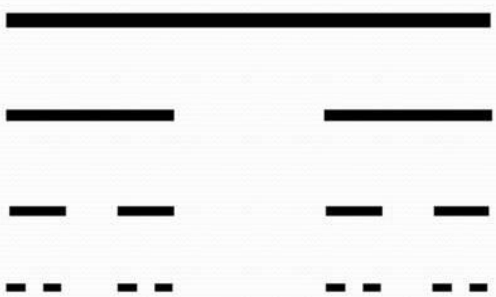
4






5





6

# Fractal natural

- Existem os fractais exatos que são gerados no computador, e os fractais naturais, cuja propriedade da autossimilaridade ocorre apenas aproximadamente.
- Um exemplo de Fractal natural é esta samambaia que repete sua forma nas ramificações e o relâmpago que também repete sua forma..

7

- A geometria fractal estuda as propriedades e comportamentos de figuras mais complexas que a geometria euclidiana (ou dimensão topológica) abrange, descreve situações que não podem ser descritas pela geometria euclidiana.

8

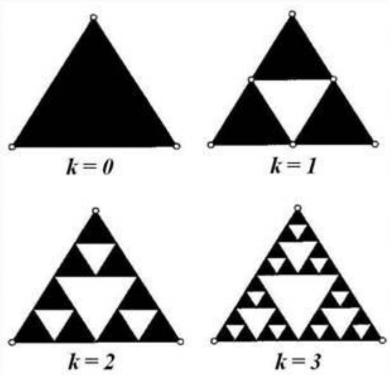
# Calculo da dimensão Fractal.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

- A dimensão dos fractais é uma dimensão fracionária, diferente da dimensão euclidiana tida como dimensão inteira, nos fractais, quase sempre nos deparamos com um resultado fracionário para determinar sua dimensão.
- Sua dimensão é calculada pela seguinte fórmula:



- A fórmula que define a dimensão de um fractal:
- Dimensão $= \frac{\log(\textit{número de peças})}{\log(\textit{fator de aumento})}$ ou $D = \frac{\log m}{\log n}$



# Características

- Os objetos geométricos fractais podem, infinitamente, ser divididos em partes, sendo que cada uma delas será semelhante à original. Normalmente são autossimilares e não dependem de escalas. Estes fractais podem ser gerados por um padrão repetido. Como exemplo de um fractal, podemos pegar o floco de neve de Koch.


11

# Construção da Curva de Koch

- A partir de um segmento de reta, divida em 3 segmentos iguais, substituindo por 4 congruentes; o intermediário, substituindo por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário. Depois, substitui cada um dos segmentos segundo a regra anterior.

12

## Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

- 1. Criar um triângulo equilátero. (ferramenta polígono regular);
- 2. Determinar o ponto médio em cada lado do triângulo. (ferramenta o ponto médio ou centro );
- 3. Criar outro triângulo equilátero usando os pontos médios. (ferramenta polígono);
- 4. criar um ponto inverso aos médios (reflexão em relação a uma reta);

13

## Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

- 5. Criar os triângulos menores.( ferramenta homotetia) clicando no centro do polígono maior e no ponto duplicado.

14

**APÊNDICE F - AULA 3**

**Aula 03**

**Data: 01/10/2018**

**Série/Turma:** 2° período de Matemática

**Conteúdo abordado: Geometria Fractal e aplicações com o Geogebra**

**Procedimentos metodológicos:** tecnologia informática (Power Point).

**Recursos didáticos:** Quadro branco, pincel, vídeo e data show

**Passo a passo da aula:**

**1° momento:** a aula será iniciada relembrando as propriedades dos fractais e comparando com a geometria euclidiana, em seguida, será explorado sobre as características, onde existem as retas e segmentos de reta com uma dimensão, figuras de superfície plana, como o quadrado com dimensão 2, e os sólidos como o cubo de dimensão 3.

Um objeto geometricamente autossemelhante, ou seja, cada uma das suas partes são uma cópia reduzida exata do objeto inicial. Este conceito de dimensão apenas pode ser considerado na análise de objetos que têm autossemelhança exata.

**2° momento:** o uso do geogebra. Ensinar os alunos a fazer a construção do Triângulo de Sierpinsk no geogebra. Passo a passo da construção.

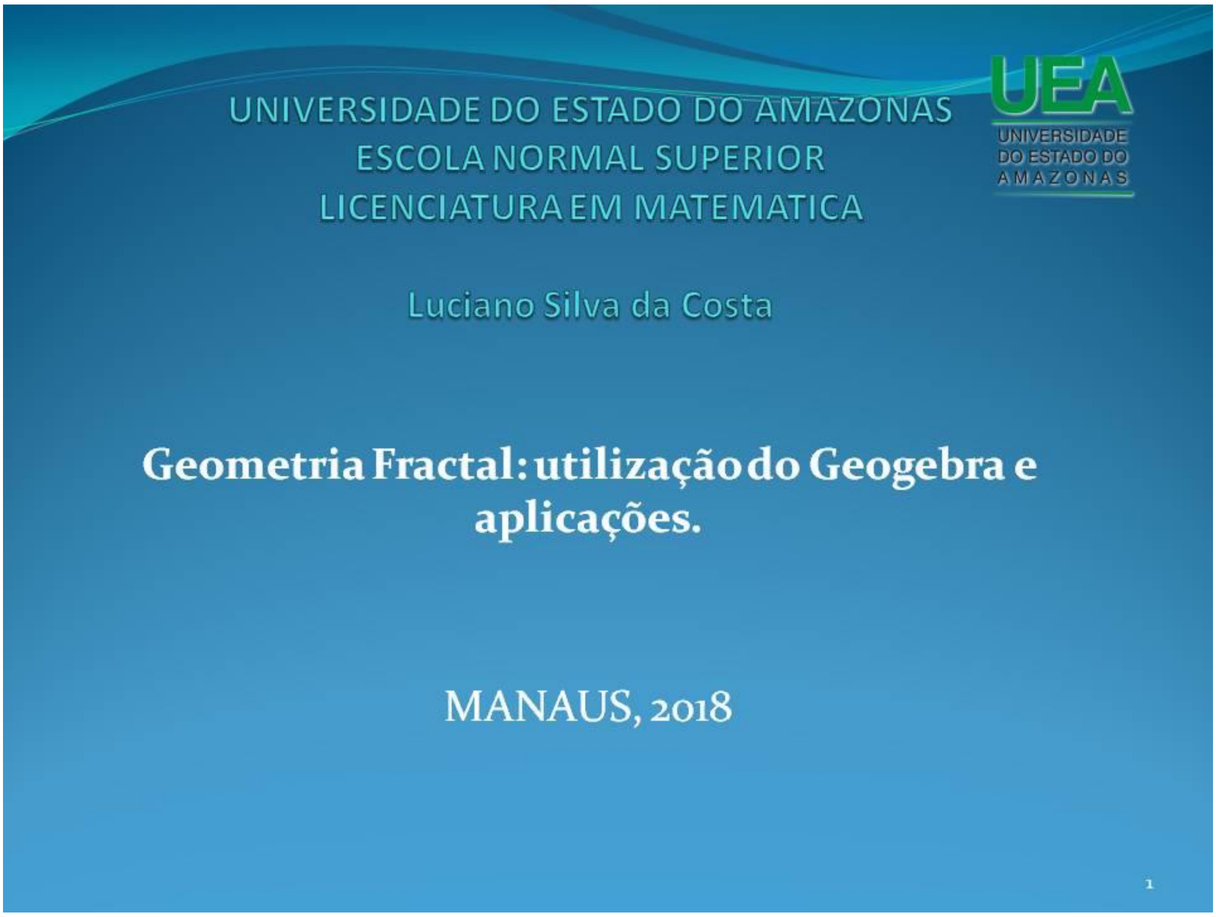
Primeiro passo para a construção do triângulo de Sierpinski é a construção de um triângulo equilátero usando a ferramenta polígono regular do geogebra, primeiro determina dois pontos e seleciona o número de vértices.

Segundo passo é determinar os pontos médios em cada um dos lados do triângulo usando a ferramenta ponto médio ou centro clicando em cada aresta do triângulo.

No terceiro passo da construção é a criar um ponto inverso aos médios usando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, e depois a criação de triângulos menores usando os pontos médios do triângulo com a ferramenta polígono.

No quarto passo da construção é criar os triângulos menores usando a ferramenta homotetia clicando no centro do polígono maior e no ponto duplicado.

Como o Triângulo de Sierpinski é um fractal que tem a característica da autossemelhança ele vai repetir a sua forma infinitamente.



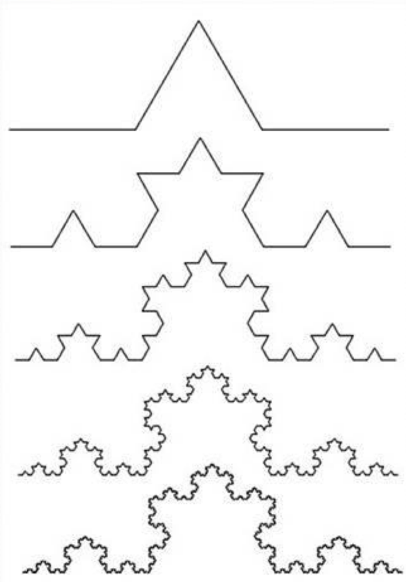
# Definição:

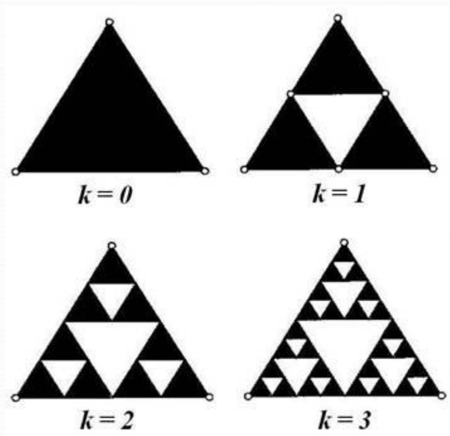
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

- Um conjunto $\boldsymbol{S}$ é chamado de fractal ou autossimilar se pode ser subdividido em $\boldsymbol{K}$ subconjuntos congruentes, onde cada um pode ser ampliado por um fator constante $\boldsymbol{M}$ para produzir o conjunto $\boldsymbol{S}$ inteiro.



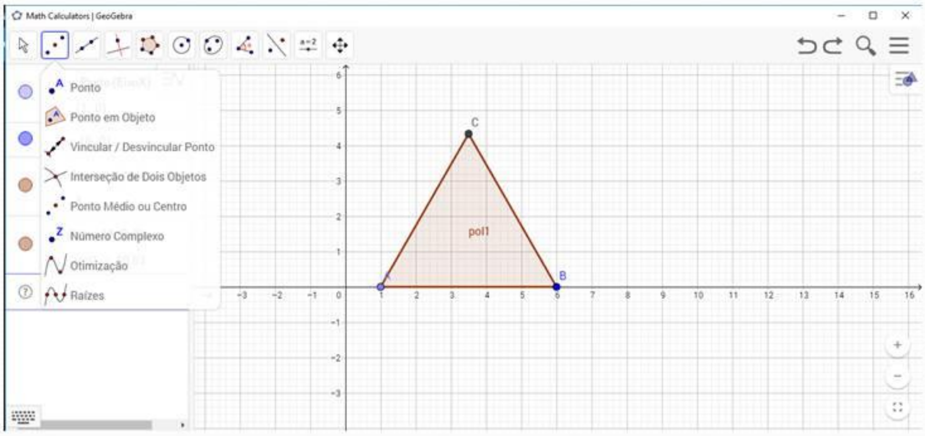
# Triângulo de Sierpinski e Curva de Koch.





# Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

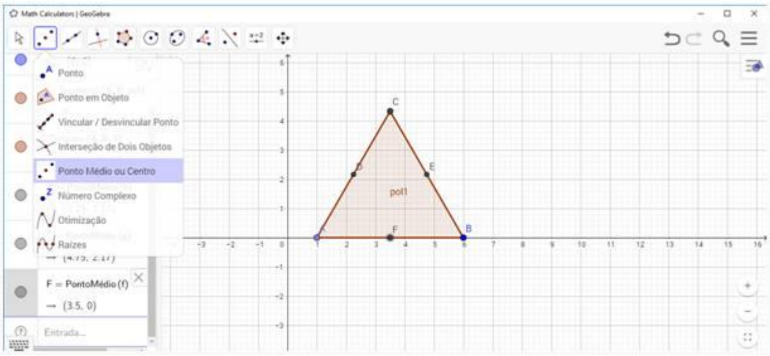
- 1. Criar um triângulo equilátero. (ferramenta polígono regular);





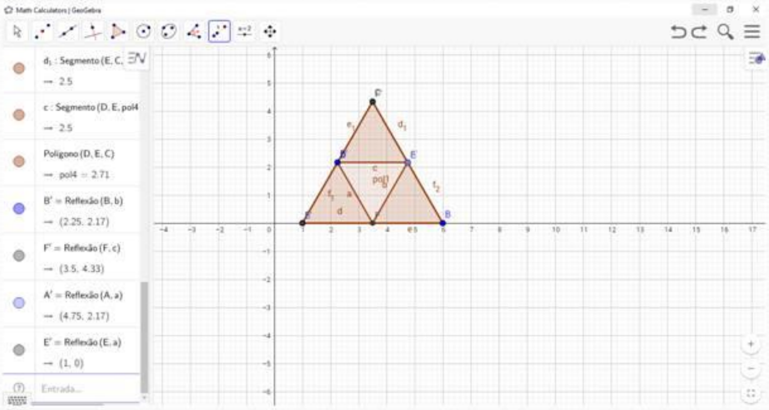

# Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

- 2. Determinar o ponto médio em cada lado do triângulo. (ferramenta o ponto médio ou centro );



# Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

- 3. Criar outro triângulo equilátero usando os pontos médios. (ferramenta polígono);



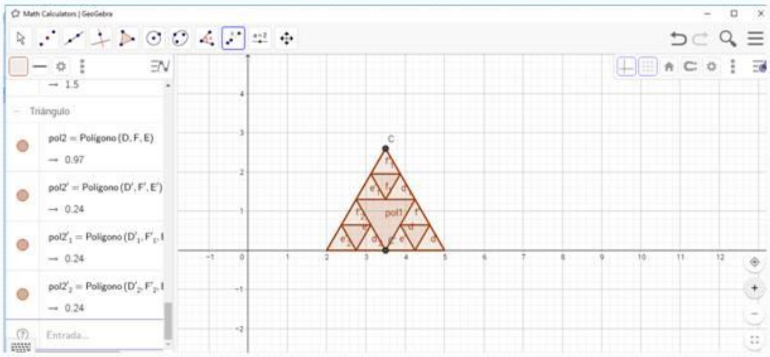



# Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

- 4. criar um ponto inverso aos médios (reflexão em relação a uma reta);

# Construção do Triângulo de Sierpinsk no Geogebra.

- 5. Criar os triângulos menores.( ferramenta homotetia) clicando no centro do polígono maior e no ponto duplicado.



## APÊNDICE G - QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES

Caro estudante, este questionário tem como objetivo avaliar as aulas ministradas pelo estagiário, saber as dificuldades que você sentiu para compreender os conteúdos, para realizar as atividades solicitadas e, assim, analisar possíveis estratégias e metodologias para melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática no nível fundamental. Asseguramos o compromisso com o sigilo das informações, respeitando a privacidade de cada estudante. Na certeza de sua colaboração, antecipadamente agradecemos.

6) O método utilizado pelo estagiário ajudou para que você tivesse mais interesse nas aulas? ( ) Sim ( ) Não

7) Cite alguns exemplos utilizados pelo estagiário que mostram onde a Matemática é usada no cotidiano.

_______________________________________________________________________

8) Quais atividades você mais gostou de fazer? Por quê?

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

9) Faça um resumo sobre o conteúdo que mais entendeu, para que ele serve.

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

5) O tempo foi suficiente para realização das atividades? ( ) Sim ( ) Não

6) As atividades permitiram a interação com os colegas? ( ) Sim ( ) Não

7) Qual o seu nível de satisfação em relação às atividades realizadas?

( ) satisfeito ( ) insatisfeito ( ) indiferente

8) Dê sugestões para melhorar as aulas.

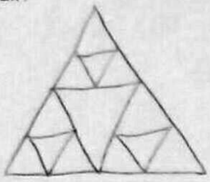
_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

Atividade 1. Triângulo de Sierpinski

Faça a construção do Triângulo de Sierpinski até a terceira iteração e responda as questões a seguir:



a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas características?

Um triângulo equilátero cuja base é paralela ao eixo horizontal

b) Depois de realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

Dois segmentos congruente para cada lado

c) c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

9 ao todo (três triângulos equiláteros)

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

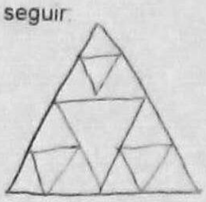
Cada segmento passou a ser substituído por outros dois, totalizando 27 segmentos (9 triângulos equiláteros)

e) Quantos triângulos você ignorou durante as etapas da construção?

Na primeira, um, na segunda, quatro

Atividade 1. Triângulo de Sierpinski

Faça a construção do Triângulo de Sierpinski até a terceira iteração e responda as questões a seguir:



a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas características?

Um triângulo. É um triângulo equilátero

b) Depois de realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

2 segmentos

c) c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

9 segmentos

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

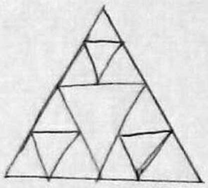
Foi substituido por 2 e a figura passou a ter 27 segmentos

e) Quantos triângulos você ignorou durante as etapas da construção?

13 triângulos

Atividade 1. Triângulo de Sierpinski

Faça a construção do Triângulo de Sierpinski até a terceira iteração e responda as questões a seguir:



a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas características?

O triângulo. Um triângulo equilátero

b) Depois de realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

Dois lados

c) c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

9 segmentos

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

4 segmentos com um total de 27 segmentos

e) Quantos triângulos você ignorou durante as etapas da construção?

4 triângulos

Atividade 1. Triângulo de Sierpinski

Faça a construção do Triângulo de Sierpinski até a terceira iteração e responda as questões a seguir:

a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas características?

Um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes

b) Depois de realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

Dois.

c) c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

Nove

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

4, 27 segmentos

e) Quantos triângulos você ignorou durante as etapas da construção?

treze na 3ª iteração